182. a.
25.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Beitrag

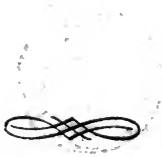
zur Integration

der

Riccatiſchen Gleichung.

Von

J. Worpitzky.



Greifswald 1862.
C. A. Koch's Verlags-Buchhandlung
Th. Kunike.

182. a. 25.
47
180. a. 64.

Digitized by Google

190. c. 61.

Digitized by Google

Vorwort.

Als ich die in den folgenden Blättern gegebene Auflösung der von dem Conte Giacomo Riccati im Jahre 1722 den Analysten vorgelegten Differentialgleichung fand, war es mir unbekannt, daß Herr Prof. Kummer bereits im 12. Bande des Crelle'schen Journals (S. 144) eine Auflösung derselben veröffentlicht, und Herr Prof. Helmling in einer 1854 herausgegebenen Schrift für particulare Integrale derselben noch andere Integralausdrücke entwickelt hat, als schon von dem Ersteren angegeben. (Das Nähere über diese befindet sich in der Anmerkung zu §. 27.)

Da es mir bis jetzt nicht möglich gewesen ist, von diesen früheren Arbeiten Kenntniß zu nehmen, so fühle ich mich beiden Herren, so wie dem Herrn Prof. Grunert für die mir gewordenen brieflichen Mittheilungen zu besonderem Danke verpflichtet.

Nach diesen habe ich aber Grund zu der Erwartung, daß in der vorliegenden Abhandlung nicht mehr von schon früher Bekanntem vorkömmt, als zum Zwecke des Zusammenhanges nothwendig ist.

Z. B. hätte die Behandlung der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = az x^{m-2}$ zum Theil wegbleiben können, da der Ausdruck ihres Integrals für den allgemeinen Fall des m nichts Neues bietet. Dieser aber ergiebt sich dort ohne Schwierigkeit, während die sich daran anschließenden endlichen Ausdrücke des Integrals für eine Reihe besonderer Werthe des m von einigem Interesse sein dürften, wenn man auch wegen der Mangelhaftigkeit der Theorie der algebraischen Gleichungen nicht im Stande ist, die in den Formeln angedeutete Integration allgemein in endlicher Form auszuführen.

Digitized by Google

Die Kettenbrüche für particulare Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2},$$

deren Veröffentlichung der Zweck dieser Blätter hauptsächlich ist, können übrigens auch mit Hülfe der allgemeinen Formeln, welche Gauß in seiner Abhandlung: **Disquisitiones generales circa seriem infinitam** $1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}x + \ldots$ **(Commentationes societatis regiae scientiarum. Cl. math. Tom. II. a.** 1812) für den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen gegeben hat, erhalten werden, wenn man die Kummerschen Reihenausdrücke kennt. Aber so viel ich weiß, ist hierüber bis jetzt Nichts veröffentlicht; und der von mir eingeschlagene Weg ist der entgegengesetzte, da ich zuerst die Kettenbrüche finde und aus diesen die Reihenausdrücke ableite.

Vielleicht, daß er einiges Interesse gewährt, da er als Zwischenstufe ziemlich elegante Näherungsbrüche für das y der obigen Gleichung liefert — vermittelst eines Verfahrens, durch welches ich auch bei anders gestalteten Kettenbrüchen interessante Resultate gefunden habe.

Den Kettenbrüchen für e^x und $\mathrm{tng}\, x$, welche sich aus dem Vorangehenden unmittelbar ergeben, habe ich einen besonderen Abschnitt gewidmet, um die Kenntniß von dem Grade ihrer Convergenz zu erlangen, ohne welche ihre Verwerthung problematisch ist. Eine andere Art ihrer Entwickelung kann man nachsehen in der Abhandlung: „Analytische Untersuchungen über die Kettenbrüche" des Herrn Prof. Grunert und in den **Notes** zu den **Eléments de géométrie** von **Legendre**, wo sie zuerst vorkommen.

Schließlich fühle ich mich gedrungen, wegen der vielleicht an manchen Stellen unvollkommenen Form der Darstellung um Nachsicht zu bitten, wiewohl ich weiß, daß vor einer strengen Kritik aus dem ersten Versuch auf dem literarischen Felde keine Milderungsgründe entnommen werden können, und ich mich gern bescheide, wenn ich dem Tadel entgehe, Wahrheit und Gründlichkeit hintenan gesetzt zu haben.

Pernau, den 10. Mai 1861.

Der Verfasser.

Digitized by Google

§. 1.

Setzt man in der Riccatischen Gleichung, welche in der Regel unter der Form

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} + by^2 = ax^m$$

dargestellt wird, $y = b^{-1}y$, so wird dieselbe

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_1^2 = abx^m.$$

Man sieht hieraus, daß es unbeschadet der Allgemeinheit frei steht, $b=1$ anzunehmen, weil sich der allgemeinere Fall zweier willkürlichen Constanten allgemein durch eine sehr einfache Relation aus dem letzteren herleiten läßt.

Weil ferner die Formeln im Folgenden eine größere Eleganz annehmen, wenn man $m-2$ für m setzt, so wollen wir die Riccatische Gleichung immer in der Gestalt

1) $$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2}$$

denken.

Mit dieser Gleichung hängt bekanntlich die Gleichung

2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = azx^{m-2}$$

sehr nahe zusammen. Denn wenn man

3) $$z = e^{\int y \partial x}$$

setzt, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{\int y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial y}{\partial x} + y^2\right] e^{\int y \partial x}$$

und durch Substitution des Letzteren in 2) die Gl. 1).

Digitized by Google

Wir wollen daher nach der Integration der Gleichung 1) auch die Gl. 2) in den Bereich unserer Betrachtung ziehen.

§. 2.

Substituiren wir in der Gl. 1) $u=xy$, $\partial y=\frac{\partial u}{x}-\frac{u}{x^2}$, so wird dieselbe

$$4) \qquad x.\frac{\partial u}{\partial x}=ax^m+u-u^2.$$

Hieraus erhält man für $xx_1=1$, $u+u_1=1$; $\frac{\partial x}{x}+\frac{\partial x_1}{x_1}=0$, $\partial u+\partial u_1=0$ die Gleichung

$$x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=ax_1^{-m}+u_1-u_1^2,$$

welche mit 4) völlig gleich gestaltet ist, nur daß $-m$ für m steht. Für $u_1=x_1y_1$ giebt aber diese, wie man sofort übersieht, eine mit 1) völlig gleich gestaltete Gleichung, in welcher $-m$ für m steht.

Daher ist hierdurch der folgende Satz bewiesen:

Ist in den Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=ax^{m-2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1}+y_1^2=ax_1^{m_1-2}$$

$m+m_1=0$, so erhält man jederzeit ein Integral der einen aus einem Integrale der andern, wenn man

$$xx_1=1, \quad xy+x_1y_1=1$$

setzt.

Interessant ist auch noch die Form, welche Gl. 4) für $x^m=t$ annimmt, vorausgesetzt, daß $m\gtrless 0$ ist. Man erhält nämlich

$$5) \qquad mt\frac{\partial u}{\partial t}=at+u-u^2,$$

indem

$$6) \qquad \begin{cases} u=xy, \\ t=x^m \end{cases}$$

Digitized by Google

§. 3.

Bevor wir zur Integration der Gl. 1) übergehen, wollen wir noch einige Reductionsformeln entwickeln; und setzen unter der Voraussetzung, daß $m+1 \gtrless 0$ ist,

$$x = \alpha x_1^{\frac{1}{m+1}}, \quad y = \alpha^{-1} x_1^{-\frac{1}{m+1}} + \beta . y_1^{-1} x_1^{-\frac{2}{m+1}}$$

Dann ist

$$\partial x = \frac{\alpha}{m+1} x_1^{-\frac{m}{m+1}} \partial x_1, \; a x^{m-2} \partial x = \frac{a\alpha^{m-1}}{m+1} x_1^{-\frac{2}{m+1}} \partial x_1;$$

$$y^2 \partial x = \frac{\alpha^{-1}}{m+1} x_1^{-\frac{m+2}{m+1}} \partial x_1 + \frac{2\beta}{m+1} y_1^{-1} x_1^{-\frac{m+3}{m+1}} \partial x_1 + \frac{\alpha\beta^2}{m+1} y_1^{-2} x_1^{-\frac{m+4}{m+1}} \partial x_1,$$

$$\partial y = -\frac{\alpha^{-1}}{m+1} x_1^{-\frac{m+2}{m+1}} \partial x_1 - \frac{2\beta}{m+1} y_1^{-1} x_1^{-\frac{m+3}{m+1}} \partial x_1 - \beta y_1^{-2} x_1^{-\frac{2}{m+1}} \partial y_1.$$

Mithin erhält man durch Substitution in der Gleichung

$$\partial y + y^2 \partial x = a x^{m-2} \partial x$$

die folgende:

$$\frac{\alpha\beta^2}{m+1} y_1^{-2} x_1^{-\frac{m+4}{m+1}} \partial x_1 - \beta y_1^{-2} x_1^{-\frac{2}{m+1}} \partial y_1 = \frac{a\alpha^{m-1}}{m+1} x_1^{-\frac{2}{m+1}} \partial x_1,$$

d. i.

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{a\alpha^{m-1}}{(m+1)\beta} . y_1^2 = \frac{\alpha\beta}{m+1} x_1^{-\frac{m+2}{m+1}};$$

und wenn man hierin $y_1 = \frac{(m+1)\beta}{a\alpha^{m-1}} . y_2$ setzt:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + y_2^2 = \frac{a\alpha^m}{(m+1)^2} x_1^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

wieder eine Riccatische Gleichung von der Gestalt der Gl. 1).

Schreiben wir aber jetzt y_1 für y_2, also $\frac{a\alpha^{m-1}}{m+1} . y^{-1}$ für βy_1^{-1} und beachten, daß $\alpha^{-1} x_1^{-\frac{1}{m+1}} = x^{-1}$ ist, so folgt, daß die Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2}$$

durch Substitution von

$$x = \alpha x_1^{\frac{1}{m+1}}, \quad y = \frac{1}{x} + \frac{a\alpha^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{x^2 y_1}$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + y_1^2 = a_1 x_1^{m_1 - 2}$$

übergeht, indem

$$a_1 = \frac{a\alpha^m}{(m+1)^2}, \quad m_1 = \frac{m}{m+1}$$

gesetzt ist. In Bezug auf die willkürliche Constante α muß man beachten, daß dieselbe nicht Null und nur dann negativ sein darf, wenn m eine ganze Zahl ist.

Wenn man jetzt für x_1, y_1 eine ähnliche Substitution vornimmt, wie wir für x, y gethan haben, so kommt man zu der Riccatischen Gleichung

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + y_2^2 = a_2 x_2^{m_2 - 2},$$

und so oft man eine solche Substitution wiederholt, offenbar immer wieder zu einer Riccatischen Gleichung, in welcher der Exponent m im Allgemeinen einen andern Werth hat, als in der vorhergehenden.

Aus dem Vorhergehenden erhellt daher die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Wenn $m+1 \gtrless 0$ ist, und auch keine der Größen m_1+1, m_2+1, m_3+1, m_4+1, ..., $m_\varepsilon+1$ verschwindet, so läßt sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2}$$

stets die Gleichung

$$\frac{\partial y_{\varepsilon+1}}{\partial x_{\varepsilon+1}} + y^2_{\varepsilon+1} = a_{\varepsilon+1} x_{\varepsilon+1}^{m_{\varepsilon+1} - 2}$$

herleiten, wobei für jedes ε

Digitized by Google

7) $$y_\varepsilon = \frac{1}{x_\varepsilon} + \frac{a_\varepsilon \alpha_\varepsilon^{m_\varepsilon+1}}{m_\varepsilon+1} \cdot \frac{1}{x_\varepsilon^2 . y_{\varepsilon+1}}$$

8) $$x_\varepsilon = \alpha_\varepsilon . x_{\varepsilon+1}^{\frac{1}{m_\varepsilon+1}},$$

9) $$\frac{a_\varepsilon . \alpha_\varepsilon^{m_\varepsilon}}{(m_\varepsilon+1)^2} = a_{\varepsilon+1},$$

10) $$m_{\varepsilon+1} = \frac{m_\varepsilon}{m_\varepsilon+1}$$

gesetzt wird, und keine der willkürlichen Constanten α, α_1, α_2, ..., α_ε verschwinden darf. Außerdem dürfen die α nur dann negativ sein, wenn die m mit entsprechendem Index ganze Zahlen sind.

§. 4.

Indem wir uns jetzt damit beschäftigen wollen, die Größen m_ε, a_ε, x_ε, y durch m, a, x, y_ε auszudrücken, erhalten wir zunächst aus Gl. 10):

$$m_1 = \frac{m}{m+1},\ m_2 = \frac{m_1}{m_1+1} = \frac{m}{2m+1},\ m_3 = \frac{m_2}{m_2+1} = \frac{m}{3m+1},$$

$$m_4 = \frac{m_3}{m_3+1} = \frac{m}{4m+1},\ \text{u. s. w.}$$

also allgemein:

11) $$m_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon m+1},$$

so daß

12) $$m_\varepsilon + 1 = \frac{(\varepsilon+1)m+1}{\varepsilon m+1}$$

ist.

Ferner ergiebt sich aus Gleichung 9)

$$a_1 = \frac{a\alpha^m}{(m+1)^2},\ a_2 = \frac{a_1 \alpha_1^{m_1}}{(m_1+1)^2},\ a_3 = \frac{a_2 \alpha_2^{m_2}}{(m_2+1)^2}, \ldots,\ a_\varepsilon = \frac{a_{\varepsilon-1} \alpha_{\varepsilon-1}^{m_{\varepsilon-1}}}{(m_{\varepsilon-1}+1)^2}.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt:

Digitized by Google

$$a_\varepsilon = \frac{a \cdot \alpha^m \cdot \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_{\varepsilon-1}^{m_{\varepsilon-1}}}{\{(m+1)(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_{\varepsilon-1}+1)\}^2},$$

d. i. durch Substitution aus 12):

$$a_\varepsilon = \frac{a \cdot \alpha^m \cdot \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_{\varepsilon-1}^{m_{\varepsilon-1}}}{\{(m+1) \cdot \frac{2m+1}{m+1} \cdot \frac{3m+1}{2m+1} \cdots \frac{\varepsilon m+1}{(\varepsilon-1)m+1}\}^2},$$

oder was dasselbe ist:

$$13) \qquad a_\varepsilon = a \cdot \frac{\alpha^m \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_{\varepsilon-1}^{m_{\varepsilon-1}}}{(\varepsilon m+1)^2}.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen 8) und 12):

$$x_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \cdot x_{\varepsilon+1}^{\frac{\varepsilon m+1}{(\varepsilon+1)m+1}}$$

oder

$$x_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon m+1}} = \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon m+1}} x_{\varepsilon+1}^{\frac{1}{(\varepsilon+1)m+1}}.$$

Daher, wenn man nach der Reihe $\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon - 1$ setzt:

$$x = \alpha \cdot x_1^{\frac{1}{m+1}},$$

$$x_1^{\frac{1}{m+1}} = \alpha_1^{\frac{1}{m+1}} \cdot x_2^{\frac{1}{2m+1}},$$

$$x_2^{\frac{1}{2m+1}} = \alpha_2^{\frac{1}{2m+1}} \cdot x_3^{\frac{1}{3m+1}}$$

u. s. w.

$$x_{\varepsilon-1}^{\frac{1}{(\varepsilon-1)m+1}} = \alpha_{\varepsilon-1}^{\frac{1}{(\varepsilon-1)m+1}} \cdot x_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon m+1}};$$

und wenn man diese Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$14) \quad \begin{cases} x = \alpha \cdot \alpha_1^{\frac{1}{m+1}} \cdot \alpha_2^{\frac{1}{2m+1}} \cdot \alpha_3^{\frac{1}{3m+1}} \cdots \alpha_{\varepsilon+1}^{\frac{1}{(\varepsilon-1)m+1}} \cdot x_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon m+1}}, \\ x_\varepsilon = x^{\varepsilon m+1} \cdot \alpha^{-\frac{\varepsilon m+1}{1}} \cdot \alpha_1^{-\frac{\varepsilon m+1}{m+1}} \cdot \alpha_2^{-\frac{\varepsilon m+1}{2m+1}} \cdots \alpha_{\varepsilon-1}^{-\frac{\varepsilon m+1}{(\varepsilon-1)m+1}}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x_{\varepsilon+1}}{x_\varepsilon} = x^m \cdot \alpha^{-\frac{m}{1}} \cdot \alpha_1^{-\frac{m}{m+1}} \cdot \alpha_2^{-\frac{m}{2m+1}} \cdots \alpha_\varepsilon^{-\frac{m}{\varepsilon m+1}} \cdot \alpha_\varepsilon^{-1},$$

daher mit Berücksichtigung der Gl. 11:

$$\frac{1}{x_\varepsilon} = \frac{x^m}{x_{\varepsilon+1} \cdot \alpha^m \cdot \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdot \alpha_3^{m_3} \cdots \alpha_\varepsilon^{m_\varepsilon} \cdot \alpha_\varepsilon}.$$

Digitized by Google

Ferner ergiebt sich aus 12 und 13:

$$\frac{a_\varepsilon \alpha_\varepsilon {}^{m_\varepsilon+1}}{m_\varepsilon+1} = a \cdot \frac{\alpha^m \alpha_1{}^{m_1} \alpha_2{}^{m_2} \ldots \alpha_\varepsilon{}^{m_\varepsilon} \alpha_\varepsilon}{(\varepsilon m+1)((\varepsilon+1)m+1)}.$$

Daher

$$\frac{a_\varepsilon \alpha_\varepsilon {}^{m_\varepsilon+1}}{m_\varepsilon+1} \cdot \frac{1}{x_\varepsilon} = \frac{a}{(\varepsilon m+1)((\varepsilon+1)m+1)} \cdot \frac{x^m}{x_{\varepsilon+1}}.$$

Substituiren wir nun dieses in der mit x_ε multiciplirten Gl. 7), so erhalten wir

$$x_\varepsilon y_\varepsilon = 1 + \frac{ax^m}{(\varepsilon m+1)((\varepsilon+1)m+1)} : x_{\varepsilon+1} y_{\varepsilon+1}.$$

Hieraus folgt, wenn man nach der Reihe $\varepsilon = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \varepsilon$ setzt, die folgende Gleichung:

$$xy = 1 + \frac{ax^m}{1.(m+1)} : \left|1 + \frac{ax^m}{(m+1)(2m+1)} : \right|1 + \frac{ax^m}{(2m+1)(3m+1)} : \left|1 + \ldots + \frac{ax^m}{(\varepsilon m+1)((\varepsilon+1)m+1)} : \right| x_{\varepsilon+1} y_{\varepsilon+1},$$

welche durch Erweiterung der einzelnen Theile des Kettenbruches der rechten Seite in die folgende übergeht:

15) $$xy = 1 + ax^m : |m+1 + ax^m : |2m+1 + ax^m : |3m+1 + \ldots$$
$$\ldots + ax^m : |\varepsilon m+1 + ax^m : |[(\varepsilon+1)m+1]\, x_{\varepsilon+1} y_{\varepsilon+1}.$$

Diese Gleichung gilt nach dem Lehrsatze des vorigen §., wenn $(m_\varepsilon+1)$ für keinen Werth des ε von $\varepsilon=0$ bis $\varepsilon=\varepsilon$ verschwindet, d. i. nach Gl. 12), wenn für keinen Werth des ε von $\varepsilon=1$ bis $\varepsilon=\varepsilon+1$

$$m = -\frac{1}{\varepsilon}$$

ist.

§. 5.

Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial X} + Y^2 = aX^{-m-2},$$

so ist aus dem vorigen §. leicht einzusehen, daß

$$XY = 1 + aX^{-m} : |-m+1 + aX^{-m} : |-2m+1 + aX^{-m} : |-3m+1 + \ldots$$
$$\ldots + aX^{-m} : |-\varepsilon m+1 + aX^{-m} : |[-(\varepsilon+1)m+1]\, X_{\varepsilon+1} Y_{\varepsilon+1},$$

wenn für keinen Werth des ε von $\varepsilon=1$ bis $\varepsilon=\varepsilon+1$

Digitized by Google

$$m = +\frac{1}{\varepsilon}$$

ist. Die Relation zwischen X und X_ε erhält man aus 14), wenn man $-m$ für m setzt; und das $M_{\varepsilon+1}$ der Gleichung

$$\frac{\partial Y_{\varepsilon+1}}{\partial X_{\varepsilon+1}} + Y^2_{\varepsilon+1} = A_{\varepsilon+1} X^{-2}_{\varepsilon+1} M$$

wird aus der Gleichung

16) $$M_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon m - 1}$$

erhalten.

Erweitert man aber die einzelnen Theile des Kettenbruches durch (-1), so erhält man

$$XY = 1 - aX^{-m} : |m - 1 + aX^{-m} : |2m - 1 + aX^{-m} : |3m - 1 + \ldots.$$

$$\ldots. + aX^{-m} : |\varepsilon m - 1 + aX^{-m} : |\left[(\varepsilon+1)m - 1\right] X_{\varepsilon+1} Y_{\varepsilon+1}$$

Wenden wir jetzt hierauf den Lehrsatz des §. 2 an, so geht aus der letzteren Gleichung ein Werth für xy hervor, wenn man $X^{-1} = x$ und $XY = 1 - xy$ setzt. Daher ist auch

17) $$xy = ax^m : |m - 1 + ax^m : |2m - 1 + ax^m : |3m - 1 + \ldots.$$

$$\ldots. + ax^m : |\varepsilon m - 1 + ax^m : |\left[(\varepsilon+1)m - 1\right] X_{\varepsilon+1} Y_{\varepsilon+1},$$

wo nur noch $X_{\varepsilon+1}$ und $A_{\varepsilon+1}$ durch x und a auszudrücken sind. Da man jedoch nach dem Obigen $X_{\varepsilon+1}$ erhält, wenn man in 14) X für x, also x^{-1} für x, und $-m$ für m setzt, so folgt:

18) $$X_\varepsilon = x^{\varepsilon m - 1} . \alpha^{-\frac{\varepsilon m - 1}{1}} . \alpha_1^{-\frac{\varepsilon m - 1}{m - 1}} . \alpha_2^{-\frac{\varepsilon m - 1}{2m - 1}} \ldots \alpha_{\varepsilon - 1}^{-\frac{\varepsilon m - 1}{(\varepsilon - 1)m - 1}},$$

wo nur noch $(\varepsilon + 1)$ für ε gesetzt zu werden braucht, um $X_{\varepsilon+1}$ durch x ausgedrückt zu erhalten.

Eben so ergiebt sich:

19) $$A_\varepsilon = a . \frac{\alpha^M \alpha_1^{M_1} \alpha_2^{M_2} \ldots \alpha_{\varepsilon-1}^{M_{\varepsilon-1}}}{(\varepsilon m - 1)^2}$$

Anmerkung. Die in diesem §. erhaltenen Resultate ergeben sich auch, wenn man die Gleichung 15) in Bezug auf $x_{\varepsilon+1} y_{\varepsilon+1}$ als unbekannte Größe auflöst und dann x für $x_{\varepsilon+1}$, y für $y_{\varepsilon+1}$, m für $m_{\varepsilon+1}$ schreibt, alsdann aber auf das xy des vorigen §. den in §. 2 bewiesenen

Digitized by Google

Lehrsatz anwendet. Direct erhält man die Formel 17) durch die Substitution von $x = x_1^{\frac{1}{m-1}}$, $y = \frac{a}{m-1} . y_1^{-1}$ in 15). — Durch die gedachte Umkehrung und Substitution ergiebt sich ferner ein zweiter Beweis des erwähnten Lehrsatzes.

§. 6.

Fassen wir jetzt die in §. 4 und §. 5 gefundenen Reduktionsformeln hier zusammen, so haben wir gefunden, daß die Gleichung

$$\frac{\partial y}{dx} + y^2 = ax^{m-2}$$

durch die Formel

20)

$$xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) + ax^m : |m \pm 1 + ax^m : |2m \pm 1 + ax^m : |3m \pm 1 + \ldots$$

$$\ldots + ax^m : |\varepsilon m \pm 1 + ax^m : | \left[(\varepsilon + 1)m \pm 1\right] XY$$

auf die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial X} + Y^2 = A . X^{M-2}$$

zurückgeführt wird, wobei jedoch mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen für kein $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \varepsilon + 1$

$$m = \mp \frac{1}{\varepsilon}$$

sein darf.

Die Beziehungen zwischen a, A, x, X, m, M sind, wenn

21) $$m_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon m \pm 1}$$

gesetzt wird:

22) $$A = a . \frac{\alpha^{m_0} \alpha_1^{m_1} . \alpha_2^{m_2} \ldots . \alpha_\varepsilon^{m_\varepsilon}}{((\varepsilon + 1)m \pm 1)^2},$$

23) $$M = m_{\varepsilon+1} = \frac{m}{(\varepsilon + 1)m \pm 1},$$

25)

$$X = x^{(\varepsilon+1)m \pm 1} . \alpha^{-\frac{(\varepsilon+1)m \pm 1}{\pm 1}} . \alpha_1^{-\frac{(\varepsilon+1)m \pm 1}{m \pm 1}} . \alpha_2^{-\frac{(\varepsilon+1)m \pm 1}{2m \pm 1}} \ldots . \alpha_\varepsilon^{-\frac{(\varepsilon+1)m \pm 1}{\varepsilon m \pm 1}},$$

wobei α, α_1, α_2, $\ldots \alpha_\varepsilon$ willkürliche Constanten bezeichnen, welche nicht verschwinden und nur dann negativ sein dür-

Digitized by Google

fen, wenn die m mit entſprechendem Index ganze Zahlen ſind.

§. 7.

Betrachten wir nun zunächſt den Fall, daß $m = \mp\frac{1}{\varepsilon+2}$ iſt, ſo erhält man aus 23)

$$M = \frac{\mp\frac{1}{\varepsilon+2}}{\mp\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2}\pm 1} = -1,\quad M-2 = -3;$$

aus 21):

$$m_k = \frac{1}{k-\varepsilon-2},\quad km\pm 1 = \frac{m}{m_k} = \mp\frac{k-\varepsilon-2}{\varepsilon+2} = \pm\frac{\varepsilon-k+2}{\varepsilon+2}.$$

$$\frac{(\varepsilon+1)m\pm 1}{km\pm 1} = \frac{1}{\varepsilon-k+2}.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir zugleich $\varepsilon-2$ für ε ſetzen, die Relation:

$$xy = \tfrac{1}{2}(1\pm 1) + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\pm\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\pm\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\pm\frac{\varepsilon-3}{\varepsilon}+\ldots$$

$$\ldots + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\pm\frac{2}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\pm\frac{1}{\varepsilon}XY,$$

oder was daſſelbe iſt:

24)

$$xy = \tfrac{1}{2}(1\pm 1)\pm ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\frac{\varepsilon-3}{\varepsilon}+\ldots.$$

$$\ldots + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\frac{2}{\varepsilon} + ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}:1}\frac{1}{\varepsilon}XY$$

zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{\mp\frac{1}{\varepsilon}-2},\quad \frac{\partial Y}{\partial X} + Y^2 = AX^{-3},$$

wobei

$$A = a\varepsilon^2.\alpha^{-\frac{1}{\varepsilon}}.\alpha_1^{-\frac{1}{\varepsilon-1}}.\alpha_2^{-\frac{1}{\varepsilon-2}}\ldots\alpha_{\varepsilon-2}^{-\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

$$X = x^{\pm\frac{1}{\varepsilon}} . \alpha^{-\frac{1}{\varepsilon}} . \alpha_1^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} . \alpha_2^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} \ldots \alpha_{\varepsilon-2}^{-\frac{1}{2}}$$

zu setzen ist.

Es sind also die beiden Gruppen von Fällen, in welchen die Relation 20) nur beschränkte Gültigkeit hat, durch 24) auf den einen Fall, daß $m = -1$ ist, zurückgeführt. Es wird dieser daher weiter unten zu näherer Betrachtung kommen.

§. 8.

Bemerkenswerth ist noch die Relation, welche sich aus §. 6 für $m = 0$ ergiebt. Wir heben diesen Fall besonders deßhalb hervor, weil sich auch später zeigen wird, daß er von den übrigen zu sondern ist.

Man findet für ihn ohne besondere Mühe

25) $xy = \frac{1}{2}(1 \pm 1) \pm a:|1 + a:|1 + a:|1 + \ldots + a:|1 + a:|XY,$

wo, da

$$M = 0, \quad A = a^{\frac{1}{2}}, \quad X = x^{\pm 1} . \alpha^{-1} . \alpha_1^{-1} . \alpha_2^{-1} \ldots \alpha_\varepsilon^{-1}$$

ist, Y aus derselben Riccatischen Gleichung bestimmt werden muß, wie y.

Obgleich also durch unsere Formeln für $m = 0$ die Riccatische Gleichung nicht auf eine andere zurückgeführt wird, so läßt sie sich doch benutzen, um ein Integral derselben zu finden, wie sogleich gezeigt werden soll.

Nehmen wir nämlich die oberen Zeichen und setzen $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\varepsilon = 1$, so ist $X = x$, also $XY = xy$; — vorausgesetzt, daß man in den beiden in Betracht kommenden Gleichungen dieselbe Constante nimmt.

Die Gleichung 25) wird daher

$$xy = 1 + a:|1 + a:|1 + a:|1 + \ldots + a:|1 + a:|xy;$$

oder wenn man den εten Näherungsbruch des Kettenbruches $1 + a:|1 + a:|1 + a:|1 + \ldots$ durch $\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$ bezeichnet:

$$xy = \frac{xy . Z_\varepsilon + aZ_{\varepsilon-1}}{xy . N_\varepsilon + aN_{\varepsilon-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$2xy . N_\varepsilon = (Z_\varepsilon - a.N_{\varepsilon-1}) \pm \sqrt{4a.Z_{\varepsilon-1}N_\varepsilon + (Z_\varepsilon - a.N_{\varepsilon-1})^2}.$$

Digitized by Google

In dem in Rede stehenden Kettenbruche ist aber $Z_{\varepsilon-1}=N_\varepsilon$; ebenso $Z_\varepsilon=N_{\varepsilon+1}$, folglich $Z_\varepsilon=N_\varepsilon+a.N_{\varepsilon-1}$, $Z_\varepsilon-a.N_{\varepsilon-1}=N_\varepsilon$.

Daher durch Substitution

$$2xy.N_\varepsilon=N_\varepsilon\pm\sqrt{4a.N_\varepsilon^2+N_\varepsilon^2}$$

d. i.: Die Gleichung

26) $$2xy=1\pm\sqrt{4a+1}$$

ist ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=ax^{-2}.$$

Diese Auflösung hat jedoch nur Realität, wenn $4a+1\gtreqless 0$ ist, giebt überhaupt nur zwei particuläre Integrale. — Es sind diese mit denjenigen von gleicher Form, welche man durch Auflösung der Gl. 25. für die unteren Zeichen erhält.

Dabei bleibt es völlig dahingestellt, welches das reelle Integral für $4a+1<0$ sei; und ist dieses auch nicht aus der Gl. 25 zu abstrahiren.

§. 9.

Es ist aber leicht, das Integral der Riccatischen Gleichung für $m=0$ auf einem anderen Wege zu finden. Denn in diesem Falle ist die Gl. 4)

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=a+u-u^2;$$

und hieraus folgt die Gleichung

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{a+u-u^2},$$

in welcher die veränderlichen Größen gesondert sind, so daß die Integration keiner Schwierigkeit mehr unterliegt.

Man erhält aus ihr die folgenden allgemeinen Integrale:

I. $4a+1>0$:

27) $$2xy=\frac{1\mp\sqrt{4a+1}+(1\pm\sqrt{4a+1})Cx^{\pm\sqrt{4a+1}}}{1+Cx^{\pm\sqrt{4a+1}}};$$

II. $4a+1=0$:

Digitized by Google

28) $$xy = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{C + lx};$$

III. $4a + 1 < 0$:

29) $$2xy = 1 - \sqrt{-4a-1}\,.\,\mathrm{tng}.\{C + \tfrac{1}{2}\sqrt{-4a-1}\,.\,lx\};$$

wo C eine willkürliche Conſtante bezeichnet.

Wie man ſogleich überſieht, enthält die Gl. 26) das particuläre Integral, welches man aus der Gleichung 27) für $C = 0$ und für $C = \infty$, aus der Gleichung 28) aber für $C = \infty$ erhält.

§. 10.

Wir haben in §. 8 geſehen, daß, wenn $m = 0$ iſt, jederzeit auch $M = 0$ ſein muß. Ebenſo erhellt aus der Formel 23) $M = \frac{m}{(\varepsilon + 1)\,m \pm 1}$ auf der Stelle, daß, wenn $M = 0$ ſein ſoll, $m = 0$ ſein muß, ſo daß es nicht möglich iſt, eine Riccatiſche Gleichung mit einem anderen m auf dieſe zurück zu führen.

Ferner können die Nenner der Theilbrüche des Kettenbruches in der Gleichung 20) nur dann für irgend einen Werth des ε verſchwinden, oder was daſſelbe iſt, es kann die Größe $\varepsilon m \pm 1$ nur dann Null werden, wenn $m = \mp\frac{1}{\varepsilon}$ iſt.

Nehmen wir aber dieſe letzteren Werthe von m und den Werth $m = 0$ aus, ſo nähert für $m \gtrless 0$, ſich $M = \frac{m}{(\varepsilon+1)\,m \pm 1}$ der Null bis zu jedem beliebigen Grade, wenn man nur ε groß genug annimmt. Ferner ſieht man aus 22), daß auch die Größe A der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man ε ins Unendliche wachſen läßt, ſo daß man ſchließlich immer zu einem ε kommen wird, für welches und für alle größeren ε die Ungleichung $\sqrt{4A + 1} > 0$ Statt findet. Es nähert ſich alſo XY, ſelbſt wenn für einige Werthe von m eine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten ſollte, endlich einmal derjenigen Größe, welche man erhält, wenn man in 27) XY für xy, X für x, $a = 0$ ſetzt, d. i. einer der Größen

$$XY = \frac{CX}{1 + CX}, \quad XY = \frac{1}{1 + CX^{-1}}.$$

Da C eine willkürliche Conſtante iſt, ſo ſteht es frei, in der zweiten $\frac{1}{C}$ für C zu ſetzen, wodurch ſie mit der erſten identiſch wird. Welchen

Digitized by Google

Werth nun auch X haben und man dem C beilegen mag, so ist immer $-1 \leqq \frac{CX}{1+CX} \leqq +1$, also auch $-1 \leqq XY \leqq +1$.

Setzen wir aber in der Gl. 25), was offenbar frei steht, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_\varepsilon = 1$ und $\alpha^{\varepsilon+1}$ für α, so ist $X = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{(\varepsilon+1)m+1}$. Nun ist es offenbar erlaubt, wenn m positiv ist, die willkürliche Constante α so anzunehmen, daß $\frac{x}{\alpha} > 1$; und wenn m negativ ist, daß $\frac{x}{\alpha} < 1$ ist. Dann wird offenbar für wachsende ε $\operatorname{Lim} X = \infty$, also $\operatorname{Lim}.XY = 1$ sein.

Wenden wir nun dieses auf die Gleichnng 20) an, so folgt aus derselben, daß durch die Gleichung

30)

$$xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) + ax^m : |m \pm 1 + ax^m : |2m \pm 1 + ax^m : |3m \pm 1 + ...$$

zwei Integrale der Riccatischen Gleichung 1) dargestellt werden, jedoch unter der Voraussetzung, daß mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen nicht $m = \mp \frac{1}{\varepsilon}$ sei, wenn ε eine positive ganze Zahl oder Unendlich bezeichnet.

Hiermit ist denn auch die Convergenz des auf der rechten Seite der Gleichung 30) stehenden Kettenbruches unter der gemachten Einschränkung in Bezug auf das m erwiesen.

§. 11.

Wegen der Wichtigkeit der Gleichung 30) wollen wir hier noch einen zweiten Beweis für dieselbe geben und nachweisen, daß dieselbe auch dann noch Gültigkeit hat, wenn $m = 0$ und $4a + 1 \geqq 0$ ist.

I. Es sei überhaupt

$$F = \alpha_1 : |a_1 + \alpha_2 : |a_2 + \alpha_3 : |a_3 + ... + \alpha_\varepsilon : |a_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon+1} : |a_{\varepsilon+1}$$

ein Kettenbruch, in welchem alle Theilzähler α_1, α_2, α_3, ... $\alpha_{\varepsilon+1}$ und auch alle Theilnenner a_1, a_2, a_3, ... a_ε mit Ausnahme des letzten $a_{\varepsilon+1}$ nach bekannten Gesetzen gebildet werden, wie groß man auch ε nehmen mag. Der εte Näherungsbruch werde, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß für α_ε und a_ε die in Rede stehenden Gesetze noch gelten, durch $F_\varepsilon = \frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$ bezeichnet.

Digitized by Google

Alsdann ist nach bekannten Lehren über die Kettenbrüche

$$F=\frac{a_{\varepsilon+1}.Z_\varepsilon+\alpha_{\varepsilon+1}.Z_{\varepsilon-1}}{a_{\varepsilon+1}.N_\varepsilon+\alpha_{\varepsilon+1}.N_{\varepsilon-1}}$$

Da wir ferner unter einem convergenten Kettenbruche einen solchen verstehen, dessen εter Näherungsbruch F_ε sich einer bestimmten endlichen Größe $\mathcal{F}$ um so mehr nähert, je größer man das ε, nachdem es einen bestimmten Werth überschritten, annimmt, so daß die Differenz $\mathcal{F}-F_\varepsilon$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann; so ist es klar, daß, wenn man $F_\varepsilon=\theta_\varepsilon.\mathcal{F}$ setzt, die Größe θ_ε sich für wachsende ε der Einheit nähert.

Aus der letzten Gleichung folgt aber $Z_\varepsilon=\mathcal{F}.\theta_\varepsilon N_\varepsilon$; und ebenso ist $Z_{\varepsilon-1}=\mathcal{F}.\theta_{\varepsilon-1}N_{\varepsilon-1}$; also

$$\frac{Z_{\varepsilon-1}}{Z_\varepsilon}=\frac{\theta_{\varepsilon-1}}{\theta_\varepsilon}.\frac{N_{\varepsilon-1}}{N_\varepsilon},$$

wo der Bruch $\frac{\theta_{\varepsilon-1}}{\theta_\varepsilon}$ sich offenbar der Einheit bis zu jedem beliebigen Grade nähert.

Setzen wir aber in dem obigen Ausdrucke von F den sich hieraus ergebenden Werth von $Z_{\varepsilon-1}$, so wird derselbe:

$$F=\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}.\frac{a_{\varepsilon+1}+\alpha_{\varepsilon+1}.\frac{\theta_{\varepsilon-1}}{\theta_\varepsilon}.\frac{N_{\varepsilon-1}}{N_\varepsilon}}{a_{\varepsilon+1}+\alpha_{\varepsilon+1}.\frac{N_{\varepsilon-1}}{N_\varepsilon}}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß der Kettenbruch

$$F_\varepsilon=\alpha_1:|a_1+\alpha_2:|a_2+\alpha_3:|a_3+\ldots+\alpha_\varepsilon:|a_\varepsilon$$

convergirt, so folgt, daß der Bruch $\frac{\theta_{\varepsilon-1}}{\theta_\varepsilon}$ und folglich auch der ganze mit $\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$ multiplicirte Bruch sich der Einheit nähert; daß also unter der gemachten Voraussetzung

$$F=\text{Lim}.\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}=\text{Lim}.F_\varepsilon$$

ist, welchen Werth auch immer $a_{\varepsilon+1}$ annehmen mag.

II. Um die Bedingungen der Convergenz des Kettenbruches

$$F=\alpha_1:|a_1+\alpha_2:|a_2+\alpha_3:|a_3+..$$

Digitized by Google

aufzuſuchen, ſubtrahiren wir die Gleichung $F_\varepsilon = \theta_\varepsilon . F$ von der Gleichung $F_{\varepsilon+1} = \theta_{\varepsilon+1} . F$ und erhalten $F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon = (\theta_{\varepsilon+1} - \theta_\varepsilon) F$. Weil nun $\theta_{\varepsilon+1}$ und θ_ε ſich von einem beſtimmten Werthe des ε an beide der Einheit nähern, falls der Kettenbruch F convergirt; ſo erhält man als Kriterium der Convergenz deſſelben, daß die Differenz $F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon$ ſich der Null als Grenze nähere, wenn ε ins Unendliche wächſt.

Bekanntlich iſt aber

$$F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon = (-1)^\varepsilon . \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{\varepsilon+1}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}}.$$

Setzen wir daher

$$\text{val. abs.} (F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon) = \Delta_\varepsilon = \text{val. abs.} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{\varepsilon+1}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}},$$

ſo iſt die Bedingung der Convergenz: $\text{Lim.} \Delta_\varepsilon = 0$.

Dieſe Bedingung kann nur erfüllt ſein, wenn von einem gewiſſen Werthe des ε an für jedes ε die Bedingung $\Delta_{\varepsilon+1} < \Delta_\varepsilon$, oder weil

$$\Delta_{\varepsilon+1} = \Delta_\varepsilon \cdot \text{val. abs.} \frac{\alpha_{\varepsilon+2} N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}}$$

iſt, die Bedingung

$$\text{val. abs.} \frac{\alpha_{\varepsilon+2} N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}} < 1$$

erfüllt iſt. Iſt aber dieſes der Fall, ſo kann man die Bedingung, daß

$$\Delta_{\varepsilon+n} = \Delta_\varepsilon \cdot \text{val. abs.} \frac{\alpha_{\varepsilon+2} N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}} \cdot \frac{\alpha_{\varepsilon+3} N_{\varepsilon+1}}{N_{\varepsilon+3}} \cdot \frac{\alpha_{\varepsilon+4} N_{\varepsilon+2}}{N_{\varepsilon+4}} \ldots \frac{\alpha_{\varepsilon+n+1} N_{\varepsilon+n-1}}{N_{\varepsilon+n+1}}$$

ſich der Null nähere, auch ſo ausdrücken, daß die mit Δ_ε auf der rechten Seite dieſer Gleichung multiciplirte Größe ſich der Null nähere. Dieſe Forderung iſt jederzeit erfüllt, wenn für jedes ε, welches größer als der oben verlangte Werth iſt, die Ungleichung

$$\text{val. abs.} \frac{\alpha_{\varepsilon+2} N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}} \gtrless \text{val. abs.} \frac{\alpha_{\varepsilon+3} N_{\varepsilon+1}}{N_{\varepsilon+3}}$$

Statt hat, weil dann

$$\Delta_{\varepsilon+n} \lessgtr \Delta_\varepsilon \quad \text{val. abs.} \left(\frac{\alpha_{\varepsilon+2} N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}} \right)^n$$

iſt, eine Ungleichung, deren rechte, alſo auch linke, Seite ſich der Null nähert.

Digitized by Google

Die gedachte Forderung ist aber auch erfüllt, wenn nicht nur für jedes endliche n alle auf der rechten Seite mit Δ_ε multiciplirten Factoren kleiner als die Einheit sind, sondern auch

$$\text{Lim.val.abs.}\frac{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}}<1$$

ist. Denn sei P der absolute Werth desjenigen von ihnen, welcher nicht kleiner als irgend einer der übrigen ist, so folgt, daß die Größe $\Delta_{\varepsilon+n}<\Delta_\varepsilon.P^n$ sich, wenn n wächst, der Null als Grenze nähert.

Beachten wir jetzt noch, daß

$$\frac{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+2}}=1:|1+\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}|$$

ist, so ergiebt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Der Kettenbruch

$$F=\alpha_1:|a_1+\alpha_2:|a_2+\alpha_3:|a_3+....$$

ist convergent:

1) wenn

$$\text{Lim.}\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3....\alpha_{\varepsilon+1}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}}=0;$$

2) wenn von einem gewissen Werthe des ε an für alle endlichen ε zugleich

$$\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}>0 \quad \text{und} \quad \frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}=\frac{a_{\varepsilon+3}N_{\varepsilon+2}}{\alpha_{\varepsilon+3}N_{\varepsilon+1}},$$

oder

$$\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}<-2 \quad \text{und} \quad \frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}=\frac{a_{\varepsilon+3}N_{\varepsilon+2}}{\alpha_{\varepsilon+3}N_{\varepsilon+1}},$$

3) wenn von einem gewissen Werthe des ε an zugleich

$$\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}>0 \quad \text{und} \quad \text{Lim.}\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}>0$$

oder

$$\frac{a_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}<-2 \quad \text{und} \quad \text{Lim.}\frac{\alpha_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+1}}{\alpha_{\varepsilon+2}N_\varepsilon}<-2$$

ist.

§. 15.

Indem wir jetzt nach den im vorigen §. entwickelten Principien die Convergenz des Kettenbruches

Digitized by Google

$$ax^m : |m \pm 1 + ax^m : |2m \pm 1 + ax^m : |3m \pm 1 + \ldots$$

prüfen wollen, steht es frei, m als positiv anzunehmen. Denn wenn m negativ ist, so braucht man nur durch (-1) zu erweitern, um in den Theilnennern $(-m)$ für m, also eine positive Größe, zu erhalten. Convergirt daher der Kettenbruch für jedes positive m ohne irgend eine Einschränkung, so gilt dasselbe auch für das negative m.

Wenn ferner $m = 0$ ist, so convergirt der Kettenbruch offenbar, wenn der durch Erweiterung mit (± 1) aus ihm hervorgehende Kettenbruch

$$\pm a : |1 + a : |1 + a : |1 + a : |1 + \ldots$$

convergirt, in welchem alle Theilnenner positiv sind.

Welchen Werth daher auch immer m haben mag, so läßt sich der Kettenbruch überhaupt auf eine solche Form bringen, daß wenigstens von einem gewissen Werthe des ε an alle Theilnenner positiv sind. Und der ganze Kettenbruch convergirt zweifelsohne, wenn dieser letzte Theil desselben convergirt, in welchem alle Theilnenner positiv sind.

Wir betrachten daher nur den Theil

$$ax^m : |\varepsilon m \pm 1 + ax^m : |(\varepsilon + 1)m \pm 1 + ax^m : |(\varepsilon + 2)m \pm 1 + \ldots$$

desselben als für sich bestehenden Kettenbruch unter der Voraussetzung, daß alle Theilnenner desselben positiv sind, und bezeichnen seine Näherungsnenner nach der Reihe durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$. Wenn dieser Kettenbruch convergirt, so convergirt, wie wir gesehen haben, auch der obige.

A. Es sei $ax^m > 0$. Ist dies der Fall, so sind nothwendig auch alle Näherungsnenner positiv, weil $\mathfrak{A}_1 = \varepsilon m \pm 1 > 0$ ist und die übrigen hieraus nach der Formel $\mathfrak{A}_{k+1} = ((\varepsilon + k)m \pm 1)\mathfrak{A}_k + ax^m . \mathfrak{A}_{k-2}$ gebildet werden, d. i. durch Addition von positiven Größen entstehen. Daher ist in diesem Falle die erste Bedingung von §. 14. II, 3:

$$\frac{|(\varepsilon + k)m \pm 1|\mathfrak{A}_k}{ax^m \mathfrak{A}_{k-1}} > 0$$

für jedes endliche k erfüllt. Es ist aber

$$\frac{|(\varepsilon + k)m \pm 1|\mathfrak{A}_k}{ax^m \mathfrak{A}_{k-1}} = \frac{|(\varepsilon+k)m \pm 1|}{ax^m} \cdot \left|1 + \frac{ax^m . \mathfrak{A}_{k-2}}{|(\varepsilon+k-1)m \pm 1|\mathfrak{A}_{k-1}}\right|.$$

Da nun $\frac{|(\varepsilon+k)m \pm 1|}{ax^m}$ sich, wenn k wächst, nicht der Null nähert, so ist, welchem Werthe auch immer $\frac{ax^m . \mathfrak{A}_{k-2}}{|(\varepsilon+k-1)m \pm 1|\mathfrak{A}_{k-1}}$ sich nähern mag, da dieser jedenfalls positiv ist, auch die zweite für die Convergenz erforderliche Bedingung, daß $\text{Lim} . \frac{|(\varepsilon+k)m \pm 1|\mathfrak{A}_k}{ax^m \mathfrak{A}_{k-1}} > 0$ sei,

Digitized by Google

erfüllt. — Wenn $m=0$ ist, so darf man überall nur die oberen Vorzeichen nehmen. — Es ist also bewiesen, daß der Kettenbruch stets convergirt, wenn $ax^m > 0$ ist.

B. Es sei $ax^m < 0$. Hierbei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

I. $m > 0$. Es sei ε so groß genommen, daß $\varepsilon m \pm 1 - 1 + ax^m > 0$ ist. Dann sind auch $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$ sämmtlich > 1, also positiv. Denn

$$\mathfrak{U}_1 = \varepsilon m \pm 1 > 1; \quad \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 + |(\varepsilon+1)m \pm 1 - 1|\mathfrak{U}_1 + ax^m > \mathfrak{U}_1 > 1;$$

$$\mathfrak{U}_3 = \mathfrak{U}_2 + |(\varepsilon+2)m \pm 1 - 1|\mathfrak{U}_2 + ax^m\mathfrak{U}_1 > \mathfrak{U}_2 + |(\varepsilon+2)m \pm 1 - 1 + ax^m|\mathfrak{U}_1 > \mathfrak{U}_2 > 1;$$

$$\mathfrak{U}_4 = \mathfrak{U}_3 + |(\varepsilon+3)m \pm 1 - 1|\mathfrak{U}_3 + ax^m\mathfrak{U}_2 > \mathfrak{U}_3 + |(\varepsilon+3)m \pm 1 - 1 + ax^m|\mathfrak{U}_2 > \mathfrak{U}_3 > 1;$$

u. s. w. Soll der Kettenbruch convergiren, so muß nach §. 14. II, 3. für jedes k incl. $k=\infty$ die Ungleichung

$$\frac{|(\varepsilon + k + 1)m \pm 1|\mathfrak{U}_{k+1}}{ax^m\,\mathfrak{U}_k} < -2$$

oder, weil nunmehr $ax^m\mathfrak{U}_k$ negativ ist, die Ungleichung

$$|(\varepsilon + k + 1)m \pm 1|.\mathfrak{U}_{k+1} + 2ax^m\mathfrak{U}_k > 0$$

erfüllt sein. Weil aber, wie wir so eben gesehen haben, allgemein $\mathfrak{U}_{k+1} > \mathfrak{U}_k > 1$ ist, so ist diese Ungleichung erfüllt, wenn

$$|(\varepsilon + k + 1)m \pm 1 + 2ax^m|\mathfrak{U}_k > 0$$

ist, oder wenn

$$|\varepsilon + k + 1|m \pm 1 + 2ax^m > 0$$

ist. Man kann aber offenbar der positiven ganzen Zahl immer einen so großen Werth beilegen, daß diese Ungleichung erfüllt ist. Dann hat sie aber auch für alle höheren k incl. $k=\infty$ Statt.

Deshalb convergirt nach dem Obigen der Kettenbruch stets, wenn $ax^m < 0$ und $m \gtrless 0$ ist.

II. $m=0$. In diesem Falle hängt die Convergenz des Kettenbruches überhaupt von der Convergenz des Kettenbruches

$$a:|1 + a:|1 + a:|1 + a:|1 + \ldots.$$

ab.

Sei zunächst $a=-\frac{1}{4}$, so ist:

$$N_1 = 1 = \frac{2}{2},\ N_2 = N_1 + a = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$N_3 = N_2 + aN_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2} = \frac{4}{8},\ N_4 = N_3 + aN_2 = \frac{4}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{16}$$

u. s. w.; überhaupt: $N_\varepsilon = \frac{\varepsilon+1}{2^\varepsilon}$, wie sich hieraus leicht durch den Schluß von ε auf $(\varepsilon+1)$ zeigen läßt.

Die Bedingung der Convergenz gestaltet sich nun nach §. 14. II, 1. so, daß

$$\text{Lim}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\varepsilon+1}}{\frac{\varepsilon+1}{2^\varepsilon}\ \frac{\varepsilon+2}{2^{\varepsilon+1}}} = \text{Lim}.\frac{2^{-2\varepsilon-2}.2^{2\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} = \text{Lim}.\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} = 0$$

sein soll, was offenbar der Fall ist.

Daher convergirt der Kettenbruch für $a = -\frac{1}{4}$ oder $4a+1=0$.

Wenn ferner $4a+1$ nicht Null ist, so sieht man aus der allgemeinen Relation $N_{\varepsilon+1} = N_\varepsilon + aN_{\varepsilon-1}$, daß die Größe $N_{\varepsilon+1}$ mit a zugleich zu- und abnimmt. Dies giebt in Verbindung mit dem Vorhergehenden, da für $4a+1=0$ die Größe $N_{\varepsilon+1}$ für jedes ε positiv ist und sich der Null als Grenze nähert, daß N_ε für jedes ε positiv ist, wenn $4a+1>0$, und daß, wenn $4a+1<0$ ist, es unendlich viele Werthe von a giebt, für welche bei irgend einem ε der Näherungsnenner N_ε verschwindet, jedenfalls aber N_ε für jedes der der Ungleichung $4a+1<0$ genügenden a wenigstens einen Zeichenwechsel vom Positiven zum Negativen erleidet.

Wenn also $4a+1>0$, so ist N_ε für jedes ε positiv. Daher wird die Ungleichung (§. 14. II, 3)

$$\frac{N_{\varepsilon+1}}{aN_\varepsilon} < -2 \text{ oder } N_{\varepsilon+1} + 2aN_\varepsilon > 0$$

erfüllt sein müssen, wenn der Kettenbruch convergiren soll.

Bezeichnen wir aber den Werth, welchen N_ε für $a = -\frac{1}{4}$ annimmt, durch N'_ε, so haben wir eben gesehen, daß $N_\varepsilon > N'_\varepsilon$ ist; und es ist aus der Gleichung $N_\varepsilon = N_{\varepsilon-1} + aN_{\varepsilon-2}$ auch klar, daß die Differenz $N_\varepsilon - N'_\varepsilon$ um so größer sein muß, je größer ε ist. Weil daher $\text{Lim}.N'_\varepsilon = 0$ ist, so folgt, daß $\text{Lim}.N_\varepsilon > 0$ sein muß.

Ist ferner für endliche ε

$$N_{\varepsilon+1}.|1+2a| > 0 \text{ oder } N_\varepsilon|1+2a| > 0,$$

Digitized by Google

so ist die Ungleichung $N_{\varepsilon+1} + 2aN_\varepsilon > 0$, eine Folgerung hieraus je nachdem $N_{\varepsilon+1} > N_\varepsilon$ oder $N_{\varepsilon+1} < N_\varepsilon$ ist. Und weil $\text{Lim.}\, N_\varepsilon = \text{Lim.}\, N_{\varepsilon+1}$ größer als Null ist, so ist offenbar die Ungleichung $N_{\varepsilon+1} + 2aN_\varepsilon > 0$ erfüllt, wenn die Ungleichung $1 + 2a > 0$ erfüllt ist. Dies ist aber sowohl für endliche ε wie für $\varepsilon = \infty$ der Fall, weil $1 + 4a > 0$, also $1 + 2a > -2a$ und nach der Voraussetzung $(-2a)$ positiv ist.

Daher convergirt der Kettenbruch auch für alle negativen Werthe von a, welche der Bedingung $4a + 1 \overset{=}{>} 0$ genügen.

Daß der Kettenbruch für $4a + 1 < 0$ nicht convergirt, läßt sich aus dem Vorhergehenden nicht ohne Umstände zeigen. Weßhalb wir auf §. 20. verweisen, aus welchem hervorgeht, daß der Kettenbruch, wenn er convergirte, einen imaginären Werth hätte, was offenbar unmöglich ist.

§. 16.

Faſſen wir jetzt die Resultate des vorigen §. zusammen, so haben wir gefunden, daß der Kettenbruch

$$ax^m : |m \pm 1 + ax^m : |2m \pm 1 + ax^m : |3m \pm 1 + \ldots$$

für alle positiven und deshalb auch für alle negativen m convergirt, wenn nicht für irgend ein positives ganzes ε, mit Beziehung der untern und obern Vorzeichen $\varepsilon m \pm 1 = 0$ ist, welchen Werth auch immer die Größen a und x haben mögen, und daß er auch für $m = 0$ convergirt, wenn $4a + 1 \overset{=}{>} 0$ ist.

Daher erhalten wir durch Anwendung des in §. 14. 1. gefundenen Resultates auf die Gleichung 20) den folgenden Satz, welcher der ganzen ferneren Untersuchung zu Grunde liegt:

Der Riccatischen Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2}, \tag{1}$$

welche für $xy = u$ die Form

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = ax^m + u - u^2 \tag{4}$$

hat, wird durch die beiden Gleichungen

31) $u = xy = 1 + ax^m : |m + 1 + ax^m : |2m + 1 + ax^m : |3m + 1 + \ldots,$

Digitized by Google

32) $u_1 = xy = ax^m : |m-1 + ax^m : |2m-1 + ax^m : |3m-1 + \ldots$

genügt, jedoch so, daß die Gleichungen 31) und 32) keine Gültigkeit haben, wenn m beziehungsweise den Gleichungen $m = -\frac{1}{\varepsilon}$ und $m = +\frac{1}{\varepsilon}$ entspricht, indem ε irgend eine endliche, positive, ganze Zahl bezeichnet. Ferner gelten die Gleichungen 31) und 32) für $m = 0$ nur dann, wenn $4a+1 \gtrless 0$ ist.

§. 17.

Indem wir jetzt beabsichtigen, den εten Näherungsbruch der in 31) und 32) enthaltenen Kettenbrüche zu entwickeln, wird es nöthig sein, Einiges über diesen Gegenstand überhaupt voraus zu schicken; indem wir uns natürlich auf das Nothwendigste beschränken.

Bezeichnen wir den εten Nährungsbruch des echten Kettenbruchs

$$F = \alpha_1 : |a_1 + \alpha_2 : |a_2 + \alpha_3 : |a_3 + \ldots .$$

durch $F_\varepsilon = \frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$, so ist nach bekannten Lehren über die Kettenbrüche allgemein

$$Z_{\varepsilon+1} = a_{\varepsilon+1}\, Z_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon+1}\, Z_{\varepsilon-1}, \quad N_{\varepsilon+1} = a_{\varepsilon+1} N_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon+1} N_{\varepsilon-1},$$

wobei $Z_0 = 0$, $N_0 = 1$ gesetzt werden muß.

Hieraus ergiebt sich:

$$Z_1 = \alpha_1,\ Z_2 = \alpha_1 . |a_2 a_3 + \alpha_3|,$$

$$Z_4 = \alpha_1 . |a_2 a_3 a_4 + a_2 . \alpha_4 + a_4 . \alpha_3|,$$

$$Z_5 = \alpha_1 . |a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 . \alpha_5 + a_5 a_5 . \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_5|,$$

u. s. w.

$$N_1 = a_1,\ N_2 = a_1 a_2 + \alpha_2,\ N_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 . \alpha_3 + a_3 \alpha_2,$$

$$N_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 . \alpha_4 + a_1 a_4 . \alpha_3 + a_3 a_4 . \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_4,$$

$$N_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 . \alpha_5 + a_1 a_2 a_5 . \alpha_4 + a_1 a_4 a_5 . \alpha_3 + a_3 a_4 a_5 . \alpha_2 + a_1 . \alpha_3 \alpha_5 + a_5 . \alpha_2 \alpha_5 + a_5 . \alpha_2 \alpha_4,$$

u. s. w.

Man sieht zunächst, daß Z_ε immer aus $N_{\varepsilon-1}$ hervorgeht, wenn man

Digitized by Google

hierin alle Indices um 1 erhöht, und dann den erhaltenen Ausdruck mit α_1 multiplicirt.

Ferner erhellt auf der Stelle, daß, wenn k eine positive, ganze Zahl incl. Null bezeichnet, die Summanden in N_ε, welche in Bezug auf die Theilnenner von der $(\varepsilon-2k)$ten Dimension sind, die Theilzähler in der kten Dimension enthalten; und daß in dem Ausdrucke von N_ε Glieder, welche die Theilzähler und Theilnenner in anderen Dimensionen enthalten, gar nicht vorkommen können.

Uns auf das allgemeine independente Bildungsgesetz von N_ε und Z_ε näher einzulassen, würde hier zu weit führen, obgleich es wegen seiner Einfachheit und Eleganz bemerkenswerth ist. Es geht aber aus dem Obigen und der Gleichung $N_\varepsilon = a_\varepsilon N_{\varepsilon-1} + \alpha_\varepsilon N_{\varepsilon-2}$ unzweifelhaft hervor, daß, wenn man die Summe der Glieder in N_ε, welche die $(\varepsilon-2k)$te Dimension der a und die kte Dimension der α enthalten, durch $\overset{\varepsilon}{G}_{2k}$ bezeichnet, allgemein die Gleichung:

33) $$\overset{\varepsilon}{G}_{2k} = a_\varepsilon \cdot \overset{\varepsilon-1}{G}_{2k} + \alpha_\varepsilon \cdot \overset{\varepsilon-2}{G}_{2k-2}$$

Statt findet.

Setzen wir in dieser nach der Reihe ε, $\varepsilon-1$, $\varepsilon-2$, $\varepsilon-3$,....$2k+1$ für ε, so erhalten wir:

$$\overset{\varepsilon}{G}_{2k} = a_\varepsilon \cdot \overset{\varepsilon-1}{G}_{2k} + \alpha_\varepsilon \cdot \overset{\varepsilon-2}{G}_{2k-2},$$

$$a_\varepsilon \overset{\varepsilon-1}{G}_{2k} = a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \cdot \overset{\varepsilon-2}{G}_{2k} + a_\varepsilon \cdot \alpha_{\varepsilon-1} \cdot \overset{\varepsilon-3}{G}_{2k-2},$$

$$a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \cdot \overset{\varepsilon-2}{G}_{2k} = a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \cdot \overset{\varepsilon-3}{G}_{2k} + a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \cdot \alpha_{\varepsilon-2} \cdot \overset{\varepsilon-4}{G}_{2k-2},$$

$$a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \cdot \overset{\varepsilon-3}{G}_{2k} = a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} a_{\varepsilon-3} \cdot \overset{\varepsilon-4}{G}_{2k} + a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \cdot \alpha_{\varepsilon-3} \overset{\varepsilon-5}{G}_{2k-2},$$

u. s. w.

$$a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \ldots a_{2k+2} \overset{2k+1}{G}_{2k} = a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \ldots a_{2k+1} \cdot \overset{2k}{G}_{2k} + a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} \ldots a_{2k+2} \cdot \alpha_{2k+1} \overset{2k-1}{G}_{2k-2}.$$

Berücksichtigen wir jetzt bei der Addition dieser Gleichungen, daß

$$\overset{2k}{G}_{2k} = \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \ldots \alpha_{2k}$$

ist, und heben, was sich heben läßt, so erhalten wir die Gleichung:

34) $$\overset{\varepsilon}{G}_{2k} = a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \ldots a_{2k+1} \cdot \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \ldots \alpha_{2k}$$
$$+ a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \ldots a_{2k+2} \cdot \alpha_{2k+1} \cdot \overset{2k-1}{G}_{2k-2}$$

Digitized by Google

$$+ a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \ldots a_{2k+3} . \alpha_{2k+2} . \overset{2k}{G}_{2k-2}$$

$$+ a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} a_{\varepsilon-2} \ldots a_{2k+4} . \alpha_{2k+3} . \overset{2k+1}{G}_{2k-2}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ a_\varepsilon a_{\varepsilon-1} . \alpha_{\varepsilon-2} . \overset{\varepsilon-4}{G}_{2k-2}$$

$$+ a_\varepsilon . \alpha_{\varepsilon-1} . \overset{\varepsilon-3}{G}_{2k-2}$$

$$+ \alpha_\varepsilon . \overset{\varepsilon-2}{G}_{2k-2},$$

eine Gleichung, deren wir uns jetzt zur Ermittelung des Werthes von N_ε bedienen wollen.

§. 18.

Weil nach der Definition (§. 17.)

$$\overset{\varepsilon}{G}_0 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_\varepsilon$$

ist, so folgt aus 34):

$$\overset{\varepsilon}{G}_2 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_\varepsilon . \left\{ \frac{\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\alpha_3}{a_2 a_3} + \frac{\alpha_4}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{\alpha_\varepsilon}{a_{\varepsilon-1} a_\varepsilon} \right\}.$$

Setzen wir aber in den Gleichungen 31) 32) $ax^m = \alpha$, $\pm 1 = n$, so ist allgemein $a_\varepsilon = n + \varepsilon m$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_\varepsilon = \alpha$, indem in der Gl. 31) $n = +1$ und in der Gl. 32) $n = -1$ genommen wird.

Daher

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right);$$

mithin

$$\overset{\varepsilon}{G}_2 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_\varepsilon . \frac{\alpha}{m} . \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_{\varepsilon-1}} - \frac{1}{a_\varepsilon} \right) \right\}$$

$$= a_1 a_2 a_3 \ldots a_\varepsilon . \frac{\alpha}{m} . \left\{ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_\varepsilon} \right\}.$$

Weil nun

Digitized by Google

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_\varepsilon}=\frac{a_\varepsilon-a_1}{a_1 a_\varepsilon}=\frac{(\varepsilon-1)\,m}{a_1 a_\varepsilon}$$

ist, so folgt:

$$G_2'=(\varepsilon-1)\,.\,a_2a_3a_4\ldots a_{\varepsilon-1}\,.\,\alpha.$$

Für k=2 erhält man aus 34) und der letzten Gleichung:

$$G_4'=a_\varepsilon a_{\varepsilon-1}\ldots a_5\,.\,\alpha^2+2a_\varepsilon a_{\varepsilon-1}\ldots a_6\,.\,a_2\,.\,\alpha^2+3\,.\,a_\varepsilon a_{\varepsilon-1}\ldots a_7\,.\,a_3a_2\,.\,\alpha^2$$
$$+4a_\varepsilon a_{\varepsilon-1}\ldots a_8\,.\,a_4a_3a_2\,.\,\alpha^2+\ldots.+(\varepsilon-3)\,a_{\varepsilon-3}a_{\varepsilon-4}\ldots a_2\,.\,\alpha^2,$$

oder:

$$G_4'=a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon\,.\,\alpha^2.\left\{\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{2}{a_3a_4a_5}+\frac{3}{a_4a_5a_6}+\ldots.+\frac{\varepsilon-3}{a_{\varepsilon-2}a_{\varepsilon-1}a_\varepsilon}\right\}.$$

Es ist aber allgemein:

$$\frac{\varepsilon}{a_{\varepsilon+1}a_{\varepsilon+2}a_{\varepsilon+3}}=\frac{1}{2m^3}\cdot\left\{-\frac{a_1}{a_{\varepsilon+1}}+\frac{a_1+a_3}{a_{\varepsilon+2}}-\frac{a_3}{a_{\varepsilon+3}}\right\}$$
$$=\frac{1}{2m^3}\cdot\left\{-a_1\left[\frac{1}{a_{\varepsilon+1}}-\frac{1}{a_{\varepsilon+2}}\right]+a_3\left[\frac{1}{a_{\varepsilon+2}}-\frac{1}{a_{\varepsilon+3}}\right]\right\},$$

daher

$$G_4'=a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon\,.\,\frac{\alpha^2}{2m^3}$$
$$\times\left\{\begin{matrix}-a_1\,.\left[\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_{\varepsilon-2}}-\frac{1}{a_{\varepsilon-1}}\right)\right]\\+a_3\,.\left[\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_{\varepsilon-1}}-\frac{1}{a_\varepsilon}\right)\right]\end{matrix}\right\};$$

d. i.

$$G_4'=a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon\,.\,\frac{\alpha^2}{2m^3}\cdot\left\{-a_1\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{\varepsilon-1}}\right)+a_3\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_\varepsilon}\right)\right\}$$
$$=a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon\,.\,\frac{\alpha^2}{2m^2}\cdot\left\{-a_1\,\frac{\varepsilon-3}{a_2a_{\varepsilon-1}}+\frac{\varepsilon-3}{a_\varepsilon}\right\}$$
$$=a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon\,.\,\alpha^2.\frac{1}{2}\,.\,\frac{(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{a_2a_{\varepsilon-1}a_\varepsilon}$$

oder

Digitized by Google

$$G_4^{(\varepsilon)} = \frac{(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{1.2} \cdot a_3 a_4 a_5 \ldots a_{\varepsilon-2} \cdot \alpha^2.$$

Wenn man auf dieſe Weiſe fortfährt, ſo findet man, daß allgemein

$$35) \qquad G_{2k}^{(\varepsilon)} = (\varepsilon-k)_k \cdot a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \ldots a_{\varepsilon-1} \cdot \alpha^k$$

iſt, wobei durch die Klammern mit unterem Index auf bekannte Weiſe Binomialcoefficienten bezeichnet werden.

Daß dieſe Gleichung allgemeine Gültigkeit hat, läßt ſich leicht auf folgende Weiſe zeigen.

Subſtituirt man nämlich aus ihr in der Gl. 33), ſo erhält man:

$$(\varepsilon-k)_k \cdot a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{\varepsilon-k} \cdot \alpha^k = (\varepsilon-k-1)_k \cdot a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{\varepsilon-k-1} \cdot a_\varepsilon \cdot \alpha^k$$
$$+ (\varepsilon-k-1)_{k-1} a_k a_{k+1} \ldots a_{\varepsilon-k-1} \cdot \alpha^k,$$

und wenn man durch $a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \ldots a_{\varepsilon-k-1} \cdot \alpha^k$ dividirt:

$$(\varepsilon-k)_k \cdot a_{\varepsilon-k} = (\varepsilon-k-1)_k \cdot a_\varepsilon + (\varepsilon-k-1)_{k-1} a_k;$$

d. i. weil

$$a_\varepsilon = n + \varepsilon m = n + km + (\varepsilon-k)m = a_k + (\varepsilon-k)m,$$
$$(\varepsilon-k-1)_k + (\varepsilon-k-1)_{k-1} = (\varepsilon-k)_k$$

iſt:

$$(\varepsilon-k)_k \cdot a_{\varepsilon-k} = (\varepsilon-k)_k \cdot a_k + (\varepsilon-k-1)_k \cdot (\varepsilon-k)m$$

oder

$$(\varepsilon-k)_k \cdot (a_{\varepsilon-k} - a_k) = (\varepsilon-k)_k \cdot (\varepsilon-2k)m,$$

oder weil $a_{\varepsilon-k} - a_k = (\varepsilon-2k)m$ iſt, die identiſche Gleichung

$$(\varepsilon-k)_k \cdot (\varepsilon-2k)m = (\varepsilon-k)_k \cdot (\varepsilon-2k)m.$$

Weil alſo die Gleichung 33) eine identiſche wird, wenn man für $G_{2k}^{(\varepsilon-1)}$, $G_{2k}^{(\varepsilon-1)}$ und $G_{2k-2}^{(\varepsilon-2)}$ die ſich aus 35) ergebenden Werthe ſetzt, ſo folgt, daß dieſe allgemeine Gültigkeit hat*).

---

*) Drückt man $G_{2k+2}^{(\varepsilon)}$ durch die Gleichung 34) aus, indem man darin auf der rechten Seite aus 35) ſubſtituirt, und ſubſtituirt dann auch auf der linken Seite aus 35), ſo erhält man, wenn man noch die Gleichung durch $a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_\varepsilon \cdot \alpha^{k+1}$ dividirt, die Gleichung

Digitized by Google

Wir wollen ferner durch $\overset{\varepsilon}{G}_{2k}$ die Summe der Glieder in dem Näherungszähler Z_ε bezeichnen, welche die Theilnenner in der $(\varepsilon-2k-1)$ten Dimension und die Theilzähler in der $(k+1)$ten Dimension enthalten. Alsdann entsteht nach §. 17. offenbar $\overset{\varepsilon}{G}_{2k}$ aus $\overset{\varepsilon-1}{G}_{2k}$, wenn man dieses mit α multiplicirt und alle Indices der Theilnenner um die Einheit erhöht. Es ist daher

$$36) \qquad \overset{\varepsilon}{G}_{2k} = (\varepsilon - k - 1)_k \, a_{k+2} a_{k+3} a_{k+4} \ldots a_{\varepsilon-k} \, \alpha^{k+1}.$$

Nachdem auf diese Weise $\overset{\varepsilon}{G}_{2k}$ und $\overset{\varepsilon}{G}_{2k}$ bestimmt sind; erhellt aber auch aus dem in §. 17. Gesagten auf der Stelle die Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen:

$$Z_\varepsilon = \overset{\varepsilon}{G}_0 + \overset{\varepsilon}{G}_2 + \overset{\varepsilon}{G}_4 + \overset{\varepsilon}{G}_6 + \ldots\ldots,$$

$$N_\varepsilon = \overset{\varepsilon}{G}_0 + \overset{\varepsilon}{G}_2 + \overset{\varepsilon}{G}_4 + \overset{\varepsilon}{G}_6 + \ldots\ldots,$$

in welchen die Reihen auf den rechten Seiten endlich sind.

Wenn wir daher jetzt aus den Gleichungen 36) und 35) substituiren, so erhalten wir:

$$\frac{(\varepsilon-k-1)_{k+1}}{a_{k+1} \cdot a_{\varepsilon-k} a_{\varepsilon-k+1} \ldots a_\varepsilon} = \frac{(k)_k}{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k+2}} + \frac{(k+1)_k}{a_{k+2} a_{k+3} \ldots a_{2k+3}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(\varepsilon-k-3)_k}{a_{\varepsilon-k-2} a_{\varepsilon-k-1} \ldots a_{\varepsilon-1}} + \frac{(\varepsilon-k-2)_k}{a_{\varepsilon-k-1} a_{\varepsilon-k} \ldots\ldots a_\varepsilon},$$

d. i. wenn man ε für $\varepsilon-2k$, n für a_{k+1} setzt:

$$\frac{(k)_k}{n(n+m)(n+2m)\ldots(n+(k+1)m)} + \frac{(k+1)_k}{(n+m)(n+2m)\ldots(n+(k+2)m)}$$

$$+ \frac{(k+2)_k}{(n+2m)(n+3m)\ldots(n+(k+3)m)} + \ldots + \frac{(k+\varepsilon-1)_k}{(n+(\varepsilon-1)m)(n+\varepsilon m)\ldots(n+(\varepsilon+k)m)}$$

$$= \frac{(k+\varepsilon)_{k+1}}{n \cdot (n+\varepsilon m)(n+(\varepsilon+1)m)\ldots(n+(\varepsilon+k)m)},$$

eine, wie es mir scheint, nicht uninteressante Gleichung, deren Beweis auf einem anderen Wege nicht ohne Schwierigkeiten anzustellen sein dürfte.

Digitized by Google

37) $$Z_\varepsilon = a_2 a_3 a_4 \ldots a_\varepsilon \cdot \alpha + (\varepsilon-2)_1 \cdot a_3 a_4 a_5 \ldots a_{\varepsilon-1} \cdot \alpha^2$$
$$+ (\varepsilon-3)_2 a_4 a_5 a_6 \ldots a_{\varepsilon-2} \cdot \alpha^3 + (\varepsilon-4)_3 \cdot a_5 a_6 a_7 \ldots a_{\varepsilon-3} \cdot \alpha^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)) \underset{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)-1}{a} \overset{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}{\cdot} \underset{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)+1}{\alpha} \overset{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}{\cdot} \alpha$$

38) $$N_\varepsilon = a_1 a_2 a_3 \ldots a_\varepsilon + (\varepsilon-1)_1 \cdot a_2 a_3 a_4 \ldots a_{\varepsilon-1} \cdot \alpha$$
$$+ (\varepsilon-2)_2 \cdot a_3 a_4 a_5 \ldots a_{\varepsilon-2} \cdot \alpha^2 + (\varepsilon-3)_3 \cdot a_4 a_5 a_6 \ldots a_{\varepsilon-3} \cdot \alpha^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)) \underset{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}{a} \overset{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}{\cdot} \underset{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}{\alpha} \overset{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}{\cdot} \alpha$$

Durch die Gleichungen 37) und 38) ist nun der εte Näherungsbruch des Kettenbruches

$$F = \alpha : |a_1 + \alpha : |a_2 + \alpha : |a_3 + \ldots,$$

in welchem allgemein $a_\varepsilon = n + \varepsilon m$ ist, völlig bestimmt.

§. 19.

Mit Hülfe der Gleichungen 37) und 38) kann man ferner, wie wir jetzt zeigen wollen, den Werth des unendlichen Kettenbruchs F als Quotienten zweier unendlichen Reihen darstellen.

Es folgt nämlich aus 36):

$$\frac{\overset{\varepsilon}{G}_{2k}}{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - k - 1)_k \cdot \alpha^{k+1}}{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1} \cdot a_{\varepsilon-k+1} a_{\varepsilon-k+2} \ldots a_\varepsilon}$$
$$= \frac{(1-\frac{k+1}{\varepsilon})(1-\frac{k+2}{\varepsilon})(1-\frac{k+3}{\varepsilon})\ldots(1-\frac{2k}{\varepsilon})\alpha^{k+1}}{a_1 1.2.3\ldots k \cdot a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1} \cdot \frac{a_{\varepsilon-k+1}}{\varepsilon} \cdot \frac{a_{\varepsilon-k+2}}{\varepsilon} \cdot \ldots \cdot \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}}$$

und aus 35):

$$\frac{\overset{\varepsilon}{G}_{2k}}{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - k)_k \cdot \alpha^k}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \cdot a_{\varepsilon-k+1} a_{\varepsilon-k+2} \ldots a_\varepsilon}$$

Digitized by Google

$$= \frac{(1-\frac{k}{\varepsilon})(1-\frac{k+1}{\varepsilon})(1-\frac{k+2}{\varepsilon})\ldots(1-\frac{2k-1}{\varepsilon})\cdot\alpha^k}{1.2.3\ldots k.a_1a_2a_3\ldots a_k.\frac{a_{\varepsilon-k+1}}{\varepsilon}.\frac{a_{\varepsilon-k+2}}{\varepsilon}\ldots\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Aber

$$\frac{a_{\varepsilon-\mu}}{\varepsilon} = \frac{n+(\varepsilon-\mu)m}{\varepsilon} = m + \frac{n-\mu m}{\varepsilon}.$$

Daher für wachsende ε:

$$\text{Lim}.\frac{a_{\varepsilon-\mu}}{\varepsilon} = m.$$

Wenn daher ε wächst, so ist

$$\text{Lim}.\frac{G_{2k}^{\varepsilon}}{a_1a_2a_3a_3\ldots a_\varepsilon} = \frac{\alpha}{a_1}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^k}{1.2.3\ldots k.a_2a_3a_4\ldots a_{k+1}},$$

$$\text{Lim}.\frac{G_{2k}^{\varepsilon}}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon} = \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^k}{1.2.3\ldots k.a_1a_2a_3\ldots a_k}.$$

Damit diese Größen endlich sind, ist der Fall $m=0$ auszuschließen.

Wir haben ferner gesehen, daß $\text{Lim}.F_\varepsilon = F$ ist. Also weil $F_\varepsilon = \frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$ gesetzt wurde:

$$F = \text{Lim}.\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon} = \text{Lim}.\frac{\frac{Z_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}}{\frac{N_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}} = \frac{\text{Lim}.\frac{Z_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}}{\text{Lim}.\frac{N_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}}$$

oder, wenn wir

$$Z = \text{Lim}.\frac{Z_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}, \quad N = \text{Lim}.\frac{N_\varepsilon}{a_1a_2a_3a_4\ldots a_\varepsilon}$$

setzten:

$$39) \qquad F = \frac{Z}{N}.$$

Aus den Gleichungen 37) und 38) findet man aber leicht mit Berücksichtigung der vorstehenden Entwickelungen für Z und N die folgenden Gleichungen:

$$40) \quad Z = \frac{\alpha}{a_1}\cdot\left|1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^1}{1.a_2} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{1.2.a_2a_3} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^3}{1.2.3a_2a_3a_4} + \ldots\right|,$$

Digitized by Google

41) $$N = 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{1.a_1} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{1.2.a_1 a_2} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^3}{1.2.3.a_1 a_2 a_3} + \ldots$$

welche allgemeine Gültigkeit haben, wenn nicht $m = 0$ ist, oder a_ε für irgend einen Werth von ε verschwindet; weil die Reihen auf den rechten Seiten allein mit diesen Ausnahmen convergiren.

Denn dividirt man mit einem Gliede der Reihen in das zunächst folgende, so erhält man in 40) und 41) beziehungsweise die Größen $\frac{\alpha}{m} \cdot \frac{1}{\varepsilon . a_{\varepsilon+1}}$ und $\frac{\alpha}{m} \cdot \frac{1}{\varepsilon . a_\varepsilon}$, welche sich, wenn nicht $m = 0$ oder für irgend ein ganzes ε $a_\varepsilon = 0$ ist, stetig der Null nähern, also einer Grenze, welche kleiner als die Einheit ist — das bekannte Kriterium der Convergenz unendlicher Reihen.

§. 20.

Da die Entwickelungen des vorigen §. für $m = 0$ nicht Gültigkeit haben, so wollen wir diesen Fall jetzt besonders betrachten.

Der Kettenbruch ist für $m = 0$:

$$F = \alpha : |n + \alpha : |n + \alpha : |n + \alpha : |n + \ldots.$$

und nach 37) und 38) seine Näherungszähler und Nenner:

$$Z_\varepsilon = n^{\varepsilon-1} . \alpha + (\varepsilon-2)_1 . n^{\varepsilon-3} . \alpha^2 + (\varepsilon-3)_2 . n^{\varepsilon-5} . \alpha^3 + (\varepsilon-4)_3 . n^{\varepsilon-7} . \alpha^4 + \ldots$$

$$\ldots + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)-1} . n^{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2} . \alpha^{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)},$$

$$N_\varepsilon = n^\varepsilon + (\varepsilon-1)_1 . n^{\varepsilon-2} . \alpha + (\varepsilon-2)_2 . n^{\varepsilon-4} . \alpha^2 + (\varepsilon-3)_3 . n^{\varepsilon-6} . \alpha^3 + \ldots.$$

$$\ldots + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)} n^{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2} . \alpha^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

$$a . N_\varepsilon = Z_{\varepsilon+1}$$

ist. Ferner ist nach den Lehren über Kettenbrüche

$$N_{\varepsilon+1} = nN_\varepsilon + \alpha N_{\varepsilon-1}$$

oder

$$\alpha = n . \frac{\alpha N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+1}} + \frac{\alpha N_{\varepsilon-1}}{N_\varepsilon} . \frac{\alpha N_\varepsilon}{N_{\varepsilon+1}};$$

folglich, weil wir so eben gesehen haben, daß $\alpha N_\varepsilon = Z_{\varepsilon+1}$, $\alpha N_{\varepsilon-1} = Z_\varepsilon$ ist:

$$F_\varepsilon . F_{\varepsilon+1} + nF_{\varepsilon+1} = \alpha.$$

Wenn daher der Kettenbruch F convergirt, so ist $\mathrm{Lim} F_\varepsilon = \mathrm{Lim} F_{\varepsilon+1} = F$; und die Gleichung wird

$$F^2 + nF = \alpha.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$$2F = -n \pm \sqrt{4\alpha + n^2}.$$

Sind nun n und α positiv, so ist auch F nothwendiger Weise positiv. Es gilt daher in diesem Falle nur das obere Vorzeichen.

Ist aber n positiv und α negativ, so muß nach den oben aufgestellten Bedingungen der Convergenz

$$\frac{nN_{\ell+1}}{\alpha N_\ell} < -2, \text{ d. i. } \frac{n}{F_{\ell+1}} < -2, \text{ also auch } \frac{n}{F} < -2$$

sein.

Aber

$$\frac{n}{F} = \frac{2n}{-n \pm \sqrt{4\alpha + n^2}} = \frac{n(-n \mp \sqrt{4\alpha + n^2})}{-2\alpha} = \frac{n(n \pm \sqrt{4\alpha + n^2})}{2\alpha}.$$

Es muß daher

$$\frac{n(n \pm \sqrt{4\alpha + n^2})}{2\alpha} < -2, \text{ oder } n(n \pm \sqrt{4\alpha + n^2}) > -4\alpha$$

sein. Damit diese Ungleichung Realität habe, muß erstens $n^2 > -4\alpha$ sein; und wenn dies der Fall ist, so ist sie nur für das obere Zeichen erfüllt. Daher darf man in der obigen Gleichung für 2F auch in diesem Falle nur das obere Zeichen nehmen.

Wenn daher $n > 0$ und $4\alpha + n^2 > 0$ ist, so ist

$$2F = -n + \sqrt{4\alpha + n^2},$$

oder

42) $$-\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}\sqrt{4\alpha + n^2} = \alpha : |n + \alpha : |n + \alpha : |n + \ldots$$

Diese Gleichung gilt aber auch noch für $4\alpha + n^2 = 0$, weil der Kettenbruch der rechten Seite durch n gehoben in den Kettenbruch:

$$n \cdot \frac{\alpha}{n^2} : |1 + \frac{\alpha}{n^2} : |1 + \frac{\alpha}{n^2} : |1 + \frac{\alpha}{n^2} : |1 + \ldots$$

übergeht, und dieser, wie weiter oben gezeigt ist, noch für $\frac{\alpha}{n^2} = -\frac{1}{4}$, d. i. für $4\alpha + n^2 = 0$ convergirt.

§. 21.

Setzen wir nun $n = +1$, $\alpha = ax^m$, so folgt aus der Gl. 31):

Digitized by Google

$$u = 1 + F = \frac{N+Z}{N}.$$

Aber nach 40) und 41)

$$N+Z = 1 + \frac{1+m}{a_1}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^1}{1} + \frac{1+2m}{a_2}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{1.2.a_1} + \frac{1+3m}{a_3}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^3}{1.2.3.a_1a_2} + \ldots.$$

d. i., weil nunmehr allgemein $1+\varepsilon m = a_\varepsilon$ ist:

$$N+Z = 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^1}{1} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{1.2.a_1} + \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^3}{1.2.3.a_1a_2} + \ldots$$

Nehmen wir noch hinzu, daß

$$\begin{aligned}\alpha:|-1+\alpha:|-1+\alpha:|-1+\alpha:|-1+\ldots. \\ = -\alpha:|1+\alpha:|1+\alpha:|1+\alpha:|1+\ldots.\end{aligned}$$

ist, so erhalten wir durch Anwendung der in Bezug auf den Kettenbruch F in den letzten §§. gefundenen Resultate auf die Gleichungen 31) und 32) den folgenden Satz.

Der Riccatischen Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2},$$

welche für $xy = u$ die Form

$$(4) \qquad x\frac{\partial u}{\partial x} = ax^m + u - u^2$$

hat, wird im Allgemeinen durch die beiden Gleichungen:

43) $u = xy = 1 + ax^m:|m+1+ax^m:|2m+1+ax^m:|3m+1+\ldots.$

$$= \frac{Z}{N} = \frac{\left\{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(m+1)(2m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^4}{1.2.3.4.(m+1)(2m+1)(3m+1)} + \ldots.\right\}}{\left\{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m+1)(2m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3(m+1)(2m+1)(3m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^4}{1.2.3.4.(m+1)(2m+1)(3m+1)(4m+1)} + \ldots.\right\}}$$

Digitized by Google

44) $u_1 = xy = ax^m : |m-1 + ax^m : |2m-1 + ax^m : |3m-1 + \ldots$

$$= \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{ax^m}{m-1} \cdot \frac{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(2m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(2m-1)(3m-1)} + \ldots}{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m-1)(2m-1)} + \ldots}$$

genügt. Wenn jedoch für irgend ein positives ganzes ε die Größe $m = -\frac{1}{\varepsilon}$ oder $m = +\frac{1}{\varepsilon}$ ist, so haben beziehungsweise die Gleichungen 43) oder 44) keine Stetigkeit. Und wenn $m = 0$ ist, so werden diejenigen

45) $$u = xy = 1 + a : |1 + a : |1 + a : |1 + \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \{+1 + \sqrt{4a+1}\},$$

46) $$u_1 = xy = -a : |1 + a : |1 + a : |1 + a : |1 + \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \{+1 - \sqrt{4a+1}\};$$

Gleichungen, welche jedoch nur dann Gültigkeit haben, wenn $4a + 1 \gtrless 0$ ist.

In den Gleichungen 43) und 44) ist

47)

$$\mathfrak{S} = 1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(m+1)(2m+1)} + \ldots,$$

$$\mathfrak{N} = 1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m+1)(2m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(m+1)(2m+1)(3m+1)} + \ldots;$$

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{ax^m}{m-1} \cdot \{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(2m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(2m-1)(3m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(2m-1)(3m-1)(4m-1)} + \ldots\}$$

Digitized by Google

47)

$$\mathfrak{U}_1 = 1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(m-1)(2m-1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(m-1)(2m-1)(3m-1)} + \cdots$$

gesetzt; und wenn man

48)

$$\mathfrak{S}' = \frac{ax^m}{m+1}\cdot\left\{1 + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^1}{1.(2m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^2}{1.2.(2m+1)(3m+1)} + \frac{\left(\frac{ax^m}{m}\right)^3}{1.2.3.(2m+1)(3m+1)(4m+1)} + \cdots\right\}$$

setzt, so hatten wir die Gleichung

49) $$\mathfrak{S} = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}',$$

so daß

50) $$u = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{U}} = 1 + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{U}},\quad u_1 = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}_1}$$

war.

Durch Differentiation erhält man ferner die für das Folgende wichtigen Gleichungen:

51) $$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} = \frac{\mathfrak{S}'}{x},\quad \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial x} = \frac{\mathfrak{S}_1}{x}.$$

§. 22.

Nachdem wir die beiden Integrale u und u_1 der Riccatischen Gleichung

(4) $$x\frac{\partial u}{\partial x} = ax^m + u - u^2$$

im Vorhergehenden auf mehrfache Weise bestimmt haben, wollen wir jetzt dazu übergehen, das allgemeine Integral derselben zu entwickeln.

Wir behaupten zunächst, daß, wenn u und u_1 Integrale der Riccatischen Gleichung sind, die Größe

Digitized by Google

52) $$U=\frac{u+CXu_1}{1+CX},$$

wo C eine willkürliche Conſtante und X eine noch zu beſtimmende Function von x bezeichnet, das allgemeine Integral der Gleichung 4) iſt.

Um dieſes zu beweiſen, differentiiren wir nach x und erhalten, wenn wir zugleich mit x multipliciren:

$$x\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{(1+CX)(x\frac{\partial u}{\partial x}+CX.x\frac{\partial u_1}{\partial x}+Cu_1x\frac{\partial X}{\partial x})-C(u+CXu_1)x\frac{\partial X}{\partial x}}{(1+CX)^2}.$$

Setzen wir jetzt für $x\frac{\partial u}{\partial x}$ und $x\frac{\partial u_1}{\partial x}$ die ſich aus (4) ergebenden Werthe, ſo wird der Zähler der rechten Seite

$$(1+CX).\{ax^m+u-u^2+CX(ax^m+u_1-u_1^2)\}-C(u-u_1)x\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$=(1+CX)^2.ax^m+(1+CX)(u+CXu_1)-(u+CXu_1)^2$$

$$-C\{(u_1-u)^2X-(u_1-u)x\frac{\partial X}{\partial x}\}$$

$$=(1+CX)^2.\{ax^m+U-U^2\}+C(u_1-u).\{x\frac{\partial X}{\partial x}-(u_1-u)X\}.$$

Folglich iſt

$$x\frac{\partial U}{\partial x}=ax^m+U-U^2+C.\frac{(u_1-u).\{x\frac{\partial X}{\partial x}-(u_1-u)X\}}{(1+CX)^2}.$$

Hieraus ſieht man, daß U der Riccatiſchen Gleichung

$$x\frac{\partial U}{\partial x}=ax^m+U-U^2$$

genügt, alſo, weil U die willkürliche Conſtante C enthält, das allgemeine Integral derſelben iſt, wenn — weil, wie man aus 43) und 44) ſieht, im Allgemeinen die Gleichung $u_1-u=0$ nicht Statt hat — die Gleichung

$$x\frac{\partial X}{\partial x}-(u_1-u)X=0$$

oder

53) $$\frac{\partial X}{X}=\frac{u_1-u}{x}\partial x$$

erfüllt iſt.

Digitized by Google

Hierdurch iſt unſere Behauptung bewieſen; und in 53) die Gleichung zur Beſtimmung von X erhalten.

Um dieſelbe zu integriren, ſubſtituiren wir für u und u_1 ihre Werthe aus 50).. Dieſes giebt:

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\frac{1}{x}\cdot \mathfrak{S}_1 \partial x}{\mathfrak{U}_1} - \frac{\frac{1}{x}\mathfrak{S}'\partial x}{\mathfrak{U}} - \frac{\partial x}{x};$$

d. i. nach 51):

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_1} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\mathfrak{U}} - \frac{\partial x}{x}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$lX = lC_1 + l\mathfrak{U}_1 - l\mathfrak{U} - lx = l.\frac{C_1 \mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}x}$$

oder

$$X = C_1 \cdot \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}x}.$$

Man darf aber offenbar, ohne der Allgemeinheit zu ſchaden, $C_1 = 1$ ſetzen, weil, wenn man den Werth von X in 52) ſubſtituirt, C_1 nur in dem Producte CC_1 vorkömmt. Setzen wir daher

$$54) \qquad X = \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}x},$$

ſo erhalten wir als das allgemeine Integral der Riccatiſchen Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{m-2}$$

oder

$$(4) \qquad x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = ax^m + U - U^2$$

die Gleichung

$$55) \qquad U = xy = \frac{u + CXu_1}{1 + CX} = \frac{\mathfrak{S}x + C.\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}x + C.\mathfrak{U}_1},$$

wenn $m \gtrless 0$ und auch nicht für irgend ein poſitives ganzes e $m = \mp \frac{1}{e}$ iſt.

Für $m = 0$ ſind u und u_1 conſtant. Daher wird durch Integration der Gl. 53), weil nach 45) und 46) $u_1 - u = -\sqrt{4a+1}$ iſt, die Gleich.

Digitized by Google

$$X = C_1 . x^{-\sqrt{4a+1}},$$

oder wenn wir wieder $C_1 = 1$ setzen, die Gleichung

56) $$X = x^{-\sqrt{4a+1}}$$

erhalten. Daher:

Wenn in der Riccatischen Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{-2}$$

oder

$$x\frac{\partial U}{\partial x} = a + U - U^2$$

$4a+1 \geqq 0$ ist, so ist das allgemeine Integral derselben:

$$U = xy = \tfrac{1}{2} . \frac{1+\sqrt{4a+1} + (1-\sqrt{4a+1})\, Cx^{-\sqrt{4a+1}}}{1 + Cx^{-\sqrt{4a+1}}};$$

offenbar dasselbe Resultat, welches wir in §. 9, Gl. 27 erhalten haben.

§. 23.

Wir wollen jetzt noch nachweisen, daß für $m = \mp\frac{1}{\varepsilon}$ die beiden Größen u und u_1 identisch sind; und setzen zu dem Zwecke zunächst $m = +\frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $km - 1 = \frac{k-\varepsilon}{\varepsilon}$. Erweitern wir aber den Bruch, durch welchen u_1 in der Gl. 44) dargestellt ist, mit $\varepsilon m - 1$ und setzen dann $\varepsilon m - 1 = 0$, so erhalten wir:

$$u_1 = \frac{\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\frac{(\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\varepsilon-1}}{1.2.3....(\varepsilon-1).\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}....\frac{-1}{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\varepsilon}}{1.2\,3....\varepsilon.\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}....\frac{-1}{\varepsilon}.\frac{1}{\varepsilon}} + ...}{\frac{(\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\varepsilon}}{1.2.3....\varepsilon.\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}....\frac{-1}{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\varepsilon+1}}{1.2.3....(\varepsilon+1).\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}....\frac{-1}{\varepsilon}.\frac{1}{\varepsilon}} + ...}$$

d. i., wenn wir jetzt mit der Größe

$$\frac{(\varepsilon a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\varepsilon}}{1.2.3....\varepsilon.\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}....\frac{-1}{\varepsilon}}$$

Digitized by Google

heben und die Brüche des Zählers und Nenners so erweitern, daß in ihren Nennern keine Brüche mehr vorkommen:

56)

$$u_1 = \frac{1 + \frac{\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1.\varepsilon} + \frac{(\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^2}{1.2.\varepsilon(\varepsilon+1)} + \frac{(\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^3}{1.2.3.\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \cdots}{1 + \frac{\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1.(\varepsilon+1)} + \frac{(\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^2}{1.2.(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \frac{(\varepsilon^2 a x^{\frac{1}{\varepsilon}})^3}{1.2.3.(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)} + \cdots}$$

Derselbe Werth ergiebt sich aber auch für u aus 43), wenn man dort ebenfalls $m = +\frac{1}{\varepsilon}$ setzt; so daß in diesem Falle die Identität der beiden particulären Integrale u und u_1 der Riccatischen Gleichung bewiesen ist.

Auf ganz ähnliche Weise beweist sich die Identität der beiden particulären Integrale u und u_1 für $m = -\frac{1}{\varepsilon}$, weßhalb wir uns dieses Beweises überheben zu dürfen glauben.

Ferner ist es leicht zu übersehen, daß sich ganz dasselbe Resultat auch unmittelbar aus den Kettenbrüchen für u und u_1 herleiten läßt.

Es geben daher, auch wenn $m = \mp\frac{1}{\varepsilon}$ ist, die Gleichungen 43) und 44) beide ein Integral der Riccatischen Gleichung, nur daß dieselben nicht von einander verschieden sind.

Setzt man aber in der Gl. 55) $u = u_1$, so sieht man, daß dann auch U nicht das allgemeine Integral, sondern dasselbe particuläre Integral u ist.

Jedoch hat man hierdurch keinen Grund, anzunehmen, daß für $m = \mp\frac{1}{\varepsilon}$ überhaupt kein allgemeines Integral der Riccatischen Gleichung existire, wenn es auch durch unsere Gleichungen nicht dargestellt wird.

§. 24.

Wir haben in §. 9 die Riccatische Gleichung, in der $m = 0$ ist, in endlicher Form integrirt. Ebenso ist es leicht, dasselbe, wenn $m = +2$ ist, zu bewerkstelligen. Denn in diesem Falle ist die Gleichung 1)

57) $$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a;$$

Digitized by Google

d. i.

$$\partial x = \frac{\partial y}{a - y^2}.$$

Bei der Integration dieser Gleichung unterscheiden sich die folgenden drei Fälle:

I. $a > 0$.

In diesem Falle wird die obige Gleichung durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$\pm 2\sqrt{a}.\partial x = \frac{\partial y}{\pm\sqrt{a} + y} + \frac{\partial y}{\pm\sqrt{a} - y}.$$

Daher durch Integration

$$\pm 2x\sqrt{a} = l.\frac{\pm\sqrt{a} + y}{C.(\pm\sqrt{a} - y)};$$

und hieraus folgt:

$$y = \pm\sqrt{a}.\frac{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}} - 1}{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}} + 1}.$$

II. $a = 0$.

In diesem Falle ist die Gleichung

$$\partial x = -\frac{\partial y}{y^2}.$$

Daher durch Integration:

$$x + C = \frac{1}{y},$$

oder:

$$y = \frac{1}{x + C}.$$

(Dies ist zugleich das allgemeine Integral der Riccatischen Gleich. für jedes m, wenn $a = 0$ ist.)

III. $a < 0$.

In diesem Falle haben wir die obige Gleichung auf die Form

$$\partial x = \frac{\partial y}{a - y^2} = -\frac{\partial y}{(-a) + y^2} = \mp\frac{1}{\sqrt{-a}}.\frac{\partial.(\pm\frac{y}{\sqrt{-a}})}{1 + (\pm\frac{y}{\sqrt{-a}})^2}$$

Digitized by Google

zu bringen und erhalten durch Integration:

$$C_1 + x = \mp \frac{1}{\sqrt{-a}} . \text{Arctng.} \left\{ \pm \frac{y}{\sqrt{-a}} \right\}.$$

Hieraus folgt:

$$y = -\sqrt{-a} \, \text{tng.} \{(C_1 + x)\sqrt{-a}\}$$

oder

$$y = -\sqrt{-a} . \text{tng.} \{C + x\sqrt{-a}\}.$$

Wir haben daher erhalten:

Wenn in der Riccatiſchen Gleichung $m = 2$, alſo dieſelbe

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a$$

$\gtrless$

iſt, ſo iſt, je nachdem $a \gtrless 0$, beziehungsweiſe

58)
$$\begin{cases} y = \pm \sqrt{a} \cdot \dfrac{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}} - 1}{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}} + 1}, \\ y = \dfrac{1}{x + C}, \\ y = -\sqrt{-a} . \text{tng.} \{C + x\sqrt{-a}\} \end{cases}$$

das Integral derſelben.

Hieraus findet man ferner ohne beſondere Mühe mit Hülfe des in §. 2 erhaltenen Satzes das Folgende:

Wenn in der Riccatiſchen Gleichung $m = -2$, alſo dieſelbe

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = ax^{-4}$$

$\gtrless$

iſt, ſo iſt, je nachdem $a \gtrless 0$, beziehungsweiſe

59)
$$\begin{cases} xy = \dfrac{(1 \mp x^{-1} \cdot \sqrt{a}) Ce^{\pm 2x^{-1} \cdot \sqrt{a}} + (1 \pm x^{-1} \cdot \sqrt{a})}{Ce^{\pm 2x^{-1} \cdot \sqrt{a}} + 1}, \\ y = \dfrac{1}{x + C}, \\ xy = 1 + x^{-1}\sqrt{-a} . \text{tng.} \{C + x^{-1}\sqrt{-a}\} \end{cases}$$

das vollſtändige Integral derſelben.

Digitized by Google

Weil nun außer diesen Gleichungen die Riccatische Gleichung, in welcher $m=2$ ist, auch durch die Gleichung 55) integrirt ist, so haben wir in diesem Falle je zwei identische Gleichungen, deren Vergleichung in so fern interessant ist, als wir durch sie für $\operatorname{tng} x$ und e^x Ausdrücke in der Form von Kettenbrüchen und unendlichen Reihen erhalten.

Wir wollen uns mit den ersteren befassen, nachdem wir erst die Integration der Gleichung 2) vollführt haben.

§. 25.

Es ist noch zu erwähnen, daß nach §. 6 alle Fälle der Riccatischen Gleichung, in denen m durch die Gleichung (23)

$$2=\frac{m}{(\varepsilon+1)m\pm 1} \quad \text{oder} \quad m=\mp\frac{2}{2\varepsilon+1}$$

ausgedrückt wird, durch die Relation 20) auf den Fall $m=2$ zurückgeführt werden.

Setzen wir daher in den Theilnennern der Gl. 20) den Werth $m=\mp\frac{2}{2\varepsilon+1}$, so erhalten wir

$$xy=\tfrac{1}{2}(1\pm 1)+ax^m:\{\pm\frac{2(\varepsilon-1)+1}{2\varepsilon+1}+ax^m:\{\pm\frac{2(\varepsilon-2)+1}{2\varepsilon+1}+\ldots$$

$$\ldots+ax^m:\{\pm\frac{2.1+1}{2\varepsilon+1}+ax^m:\{\pm\frac{1}{2\varepsilon+1}+ax^m:\{\pm\frac{2(-1)+1}{2\varepsilon+1}XY.$$

Folglich, wenn wir der Kürze wegen

60) $\quad (2\varepsilon+1)^2 ax^{\mp\frac{2}{2\varepsilon+1}}=\lambda$

setzen:

$$\frac{1}{+1} \qquad \lambda:\{2\varepsilon-3+\lambda:\{2\varepsilon-5+\lambda:\{2\varepsilon-7+\ldots$$

$$\lambda:\{1+\lambda:\{-XY$$

$$\frac{1}{+1}\cdot\frac{\lambda Z_{\varepsilon-1}-XY.Z_\varepsilon}{\lambda N_{\varepsilon-1}-XY.N_\varepsilon},$$

Digitized by Google

63)

$$Z_\varepsilon = 1.3.5....(2\varepsilon-3).\lambda + (\varepsilon-2)_1.3.5....(2\varepsilon-5).\lambda^2$$
$$+ (\varepsilon-3)_2.5.7....(2\varepsilon-7).\lambda^3 + (\varepsilon-4)_3.7.9....(2\varepsilon-9).\lambda^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$.... + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)-1}.(\varepsilon-1+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)^{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}.\lambda^{\frac{1}{2}(\varepsilon+\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)},$$

$$N_\varepsilon = 1.3.5....(2\varepsilon-1) + (\varepsilon-1)_1.3.5....(2\varepsilon-3).\lambda$$
$$+ (\varepsilon-2)_2.5.7....(2\varepsilon-5)\lambda^2 + (\varepsilon-3)_3.7.9....(2\varepsilon-7)\lambda^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$.... + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}.(\varepsilon+\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)^{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}.\lambda^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}.$$

64)

$$Z_{\varepsilon-1} = 3.5....(2\varepsilon-3)\lambda + (\varepsilon-3)_1.5.7....(2\varepsilon-5)\lambda^2 + (\varepsilon-4)_2.7.9....(2\varepsilon-7)\lambda^3 + ...$$
$$.... + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon-1-\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)-1}.(\varepsilon+\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)^{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}.\lambda^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\sin\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)},$$

$$N_{\varepsilon-1} = 3.5....(2\varepsilon-1) + (\varepsilon-2)_1.5.7....(2\varepsilon-3)\lambda + (\varepsilon-3)_2.7.9....(2\varepsilon-5)\lambda^2 + ...$$
$$.... + (\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2))_{\frac{1}{2}(\varepsilon-1-\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}.(\varepsilon+1+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi^2)^{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2}.\lambda^{\frac{1}{2}(\varepsilon-1-\cos\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2)}$$

gesetzt ist.

Nach 22) und 23) ist ferner für $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\varepsilon = 1$:

65) $$A = (2\varepsilon+1)^2 a,$$

66) $$X = x^{\mp\frac{1}{2a+1}}.$$

Wenn man daher nach den in §. 24. dargestellten Formeln das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial X} + Y^2 = A$$

erhalten hat, so ergiebt sich das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a x^{\mp\frac{2}{2\varepsilon+1}-2} = a x^{-2.\frac{2\varepsilon+1\mp1}{2\varepsilon+1}}$$

durch die Gleichungen 60) bis 66) in endlicher Form, wie folgt:

I. $a > 0$:

Digitized by Google

67)

$$xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) \pm \frac{1}{2\varepsilon+1} \cdot \frac{Z_\varepsilon \cdot \{\mathfrak{C} e^{2\lambda^{\frac{1}{2}}} - 1\} - \lambda^{\frac{1}{2}} Z_{\varepsilon-1} \cdot \{\mathfrak{C} e^{2\lambda^{\frac{1}{2}}} + 1\}}{N_\varepsilon \cdot \{\mathfrak{C} e^{2\lambda^{\frac{1}{2}}} - 1\} - \lambda^{\frac{1}{2}} N_{\varepsilon-1} \cdot \{\mathfrak{C} e^{2\lambda^{\frac{1}{2}}} + 1\}};$$

II. $a = 0$:

68)

$$y = \frac{1}{x + \mathfrak{C}};$$

III. $a < 0$:

69)

$$xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) \pm \frac{1}{2\varepsilon+1} \cdot \frac{Z_\varepsilon \cdot \operatorname{tng}(\mathfrak{C} + \sqrt{-\lambda}) - Z_{\varepsilon-1} \cdot \sqrt{-\lambda}}{N_\varepsilon \cdot \operatorname{tng}(\mathfrak{C} + \sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1} \cdot \sqrt{-\lambda}}.$$

In diesen Gleichungen sind nur noch für λ, Z_ε, $Z_{\varepsilon-1}$, N_ε, $N_{\varepsilon-1}$ die durch die Gleichungen 60), 63), 64) bestimmten Werthe zu setzen.

§. 26.

Außer den bis jetzt betrachteten Fällen giebt es noch eine Reihe von Werthen des m, für welche uns die Formel 20) ebenfalls die Integration durch endliche Ausdrücke an die Hand giebt; auf eine ganz ähnliche Weise, wie wir in §. 8. Integrale für $m = 0$ gefunden haben. Wir kommen erst jetzt darauf zurück, weil sie dieselben sind, wie die im vorigen §. behandelten, und wir dabei die Formeln 37) und 38) benutzen müssen.

Es beruht diese Lösung darauf, daß wir die Riccatische Gleichung durch die Formel 20) auf eine andere mit demselben m zurückführen.

Es ist nämlich nach 23) $M = m$, wenn $(\varepsilon+1)m \pm 1 = 1$ oder $m = \frac{1 \mp 1}{\varepsilon+1}$ ist. Nimmt man das obere Zeichen, so folgt $m = 0$, der in §. 8. behandelte Fall; nimmt man aber das untere Zeichen, so folgt $m = \frac{2}{\varepsilon+1}$.

Wenn wir nun die willkürlichen Constanten $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_\varepsilon = 1$ setzen, so ergiebt sich $A = a$ und $X = x$. Soll ferner noch die Gleichung $Y = y$ Statt finden, so ist es nöthig, festzusetzen, daß auch den willkürlichen Constanten in beiden Integralen derselbe Werth beigelegt sei. Und wir werden durch Auflösung der Gleichung

70)

$$xy = ax^m : \{m-1 + ax^m : \{2m-1 + ax^m : \{3m-1 + \ldots + ax^m : \{[(\varepsilon+1)m-1]xy$$

Digitized by Google

in Bezug auf xy als unbekannte Größe, indem wir $m = \frac{2}{\varepsilon+1}$ ſetzen, diejenigen particulären Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a x^{\frac{2}{\varepsilon+1}-2}$$

erhalten, welche die Gleichſetzung des Y und y zulaſſen, was offenbar nicht von jedem Werthe der willkürlichen Conſtanten behauptet werden kann.

Subſtituiren wir zunächſt in den Theilnennern $m = \frac{2}{\varepsilon+1}$, ſo folgt:

$$xy = ax^m : \left| -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} + ax^m : \right| - \frac{\varepsilon-3}{\varepsilon+1} + \ldots + ax^m : \left| + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} + ax^m : \right| xy$$

oder, indem wir

71) $$\varrho = (\varepsilon+1)^2 a x^{\frac{2}{\varepsilon+1}}$$

ſetzen:

$$(\varepsilon+1)xy$$

$$= \varrho : \left| -(\varepsilon-1) + \varrho : \right| -(\varepsilon-3) + \varrho : \left| -(\varepsilon-5) + \ldots + \varrho : \right| + (\varepsilon-1) + \varrho : \left| (\varepsilon+1)xy. \right.$$

Dieſes giebt:

$$(\varepsilon+1)xy = \frac{(\varepsilon+1)xy \,.\, Z_\varepsilon + \varrho \,.\, Z_{\varepsilon-1}}{(\varepsilon+1)xy \,.\, N_\varepsilon + \varrho \,.\, N_{\varepsilon-1}}$$

oder

$$2(\varepsilon+1)xy \,.\, N_\varepsilon = (Z_\varepsilon - \varrho N_{\varepsilon-1}) \pm \sqrt{4\varrho Z_{\varepsilon-1} N_\varepsilon + (Z_\varepsilon - \varrho N_{\varepsilon-1})^2}.$$

Es iſt aber nach einem bekannten Satze:

$$Z_{\varepsilon-1} N_\varepsilon = (-1)^\varepsilon \,.\, \varrho^\varepsilon + Z_\varepsilon N_{\varepsilon-1},$$

ſo daß unſere Gleichung auch unter der Form:

$$2(\varepsilon+1)xy \,.\, N_\varepsilon = (Z_\varepsilon - \varrho N_{\varepsilon-1}) \pm \sqrt{(-1)^\varepsilon 4\varrho^{\varepsilon+1} + (Z_\varepsilon + \varrho N_{\varepsilon-1})^2}$$

dargeſtellt werden kann.

Hierin iſt nach 37) und 38), wenn ε gerade iſt:

Digitized by Google

72) $$Z_\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon-1}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}|1.3.5....(\varepsilon-3)|^2(\varepsilon-1).\varrho-(\varepsilon-2)_1.|1.3.5....(\varepsilon-5)|^2(\varepsilon-3).\varrho^2\\ +(\varepsilon-3)_2.|1.3.5....(\varepsilon-7)|^2(\varepsilon-5).\varrho^3-....+(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.(\tfrac{1}{2}\varepsilon)_{\frac{1}{2}\varepsilon-1}.\varrho^{\frac{1}{2}\varepsilon}\end{array}\right\},$$

$$N_\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}|1.3.5....(\varepsilon-1)|^2-(\varepsilon-1)_1.|1.3.5....(\varepsilon-3)|^2\varrho\\ +(\varepsilon-2)_2.|1.3.5....(\varepsilon-5)|^2.\varrho^2-....+(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}\varrho^{\frac{1}{2}\varepsilon}\end{array}\right\},$$

$$N_{\varepsilon-1} = (-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}|1.3.5....(\varepsilon-3)|^2(\varepsilon-1)-(\varepsilon-2_1).|1.3.5....(\varepsilon-5)|^2(\varepsilon-3).\varrho\\ +(\varepsilon-3)_2.|1.3.5....(\varepsilon-7)|^2.(\varepsilon-5).\varrho^2-....+(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.(\tfrac{1}{2}\varepsilon)_{\frac{1}{2}\varepsilon-1}.\varrho^{\frac{1}{2}\varepsilon}\end{array}\right\}.$$

Hieraus folgt $Z_\varepsilon + \varrho.N_{\varepsilon-1} = 0$, so daß die obige Gleichung, durch welche xy ausgedrückt wird, in die folgende übergeht:

$$(\varepsilon+1)xy.N_\varepsilon = Z_\varepsilon \pm (-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.\varrho^{\frac{\varepsilon+1}{2}}.$$

Wenn aber ε ungerade ist, so gilt einestheils die von uns gemachte Anwendung der Formel 20) nicht mehr, weil dann einer der Theilnenner verschwindet, anderntheils nimmt auch die aus ihr entwickelte obige Gleichung die Form $xy = \frac{0}{0}$ an.

Da also ε nur gerade sein darf, so wollen wir jetzt 2ε für ε schreiben und erhalten, indem wir beachten, daß ϱ in das durch die Gleichung 60) bestimmte λ mit dem unteren Zeichen übergeht, und zunächst unter dieser Beschränkung

73)

$$\mathfrak{S}_{2\varepsilon} = |1.3.5....(2\varepsilon-3)|^2(2\varepsilon-1).\lambda-(2\varepsilon-2)_1.|1.3.5....(2\varepsilon-5)|^2(2\varepsilon-3).\lambda^2$$
$$+(2\varepsilon-3)_2.|1.3.5....(2\varepsilon-7)|^2.(2\varepsilon-5).\lambda^3-....$$
$$....+(-1)^{\varepsilon-1}(\varepsilon)_{\varepsilon-1}.\lambda^\varepsilon,$$

$$\mathfrak{U}_{2\varepsilon} = |1.3.5....(2\varepsilon-1)|^2-(2\varepsilon-1)_1.|1.3.5....(2\varepsilon-3)|^2.\lambda$$
$$+(2\varepsilon-2)_2|1.3.5....(2\varepsilon-5)|^2.\lambda^2-....+(-1)^\varepsilon.(\varepsilon)_\varepsilon\lambda^\varepsilon....$$

setzen, durch die Gleichung

73) $$(2\varepsilon+1).xy.\mathfrak{U}_{2\varepsilon} = -\mathfrak{S}_{2\varepsilon} \pm \lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)}$$

zwei Integrale der Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a x^{\frac{2}{2\varepsilon+1}-2}.$$

Nach §. 2. erhält man aber das Integral für $(-m)$, wenn man in demjenigen für $(+m)$ sowohl $(-m)$ für $(+m)$, als auch x^{-1} für x^{+1} setzt, durch Subtraction von der Einheit.

Daher erhält man aus 70) für $m = -\frac{2}{\varepsilon+1}$:

$$1 - xy$$

$$= a x^m : | - m - 1 + a x^m : | - 2m - 1 + \ldots + a x^m : | [-(\varepsilon+1)m - 1](1 - xy)$$

$$= a x^m : | - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} + a x^m : | - \frac{\varepsilon-3}{\varepsilon+1} + \ldots + a x^m : | + \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+1}(1 - xy),$$

oder wenn wir jetzt

$$\varrho_1 = (\varepsilon+1)^2 a x^{-\frac{2}{\varepsilon+1}}$$

setzen:

$$(\varepsilon+1)(1 - xy)$$

$$= \varrho_1 : | - (\varepsilon-1) + \varrho_1 : | - (\varepsilon-3) + \ldots + \varrho_1 : | + (\varepsilon+1) + \varrho_1 : | + (\varepsilon+1)(1 - xy).$$

Hieraus folgt:

$$(\varepsilon+1)(1 - xy).N'_\varepsilon = Z'_\varepsilon \pm (-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon} . \varrho_1^{\frac{\varepsilon+1}{2}},$$

wo Z'_ε und N'_ε aus Z_ε und N_ε hervor gehen, wenn man in ihren Ausdrücken 72) ϱ_1 für ϱ setzt.

Setzen wir jetzt wieder 2ε für ε, so geht ϱ_1 in den Ausdruck (60) für λ mit dem oberen Zeichen über. Und wir erhalten die Gleichung

74) $$(2\varepsilon+1)xy.\mathfrak{N}_{2\varepsilon} = (2\varepsilon+1).\mathfrak{N}_{2\varepsilon} + \mathfrak{Z}_{2\varepsilon} \pm \lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)},$$

durch welche zwei Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a x^{-\frac{1}{2}\frac{2}{2\varepsilon+1}-2}$$

dargestellt werden.

Fassen wir nun die beiden bisher getrennten Fälle zusammen, so ist mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen sowohl

75) $$u = xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) \pm \frac{\mathfrak{Z}_{2\varepsilon} + \lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)}}{(2\varepsilon+1)\mathfrak{N}_{2\varepsilon}}$$

wie auch

Digitized by Google

76) $$u_1 = xy = \tfrac{1}{2}(1 \pm 1) \pm \frac{\mathfrak{S}_{2\varepsilon} - \lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)}}{(2\varepsilon+1)\mathfrak{U}_{2\varepsilon}}$$

ein Integral der Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = a x^{\mp \frac{2}{2\varepsilon+1}-2},$$

indem jetzt wieder λ dieselbe Bedeutung, wie im vorigen §., nämlich

(60) $$\lambda = (2\varepsilon+1)^2 a x^{\mp \frac{2}{2\varepsilon+1}}$$

hat.

Es darf in diesen particulären Integralen, so wenig wie in den im vorigen §. angegebenen allgemeinen Integralen derselben Gleichung, $\varepsilon = 0$ sein.

Um aus ihnen das allgemeine Integral zu finden, ist es nach §. 22. nöthig, die Gleichung 53)

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{u_1 - u}{x}\partial x = \mp \frac{2\lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)}\partial x}{(2\varepsilon+1)\mathfrak{U}_{2\varepsilon} x},$$

oder weil $\frac{\partial x}{x} = \mp \frac{2\varepsilon+1}{2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\lambda}$ ist, die Gleichung

77) $$\frac{\partial X}{X} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon-1)} \cdot \partial \lambda}{\mathfrak{U}_{2\varepsilon}}$$

aufzulösen; was sich aber nicht bewerkstelligen läßt, weil man nicht im Stande ist, die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{U}_{2\varepsilon} = 0$ anzugeben.

§. 27.

Indem wir jetzt die Integration der Gleichung 2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a z x^{m-2}$$

vollführen wollen, ist es nach §. 1. nöthig, das Integral $\int y \partial x$ zu entwickeln, weil nach Gleichung 3)

$$z = e^{\int y \partial x}$$

ist.

Wir betrachten zunächst den allgemeinsten Fall, in welchem die Gleichung 55) gilt, und erhalten aus derselben:

Digitized by Google

$$y\partial x = \frac{\mathfrak{S}x + C\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1} \cdot \frac{\partial x}{x};$$

oder weil ſich mit Hülfe von 51) und 49)

$$\frac{\partial.(\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1)}{\partial x} = \mathfrak{U} + x\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + C.\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial x} = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}' + C\mathfrak{S}_1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}.(\mathfrak{S}x + C\mathfrak{S}_1)$$

ergiebt:

$$y\partial x = \frac{\partial.(\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1)}{\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1}.$$

Daher:

$$\int y\partial x = l.\{C_1(\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1)\},$$

und

$$z = C_1.(\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1).$$

Hierbei war vorausgeſetzt, daß weder $m = 0$ noch $m = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ ſei.

Wenn aber $m = -\frac{1}{\varepsilon}$ oder $m = +\frac{1}{\varepsilon}$ iſt, ſo haben wir beziehungsweiſe nur die particulären Integrale in den Gleichungen 43) und 44), aus welchen

$$y\partial x = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{U}} \cdot \frac{\partial x}{x} \quad \text{oder} \quad y\partial x = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}_1} \cdot \frac{\partial x}{x}$$

folgt. Aber nach 51) und 49):

$$\partial.\mathfrak{U}x = \mathfrak{U} + x\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}, \quad \partial\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{S}_1}{x}.$$

Daher iſt beziehungsweiſe

$$y\partial x = \frac{\partial.\mathfrak{U}x}{\mathfrak{U}x} \quad \text{oder} \quad y\partial x = \frac{\partial\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_1},$$

$$\int y\partial x = l.C_1\mathfrak{U}x \quad \text{oder} \quad \int y\partial x = l.C_1\mathfrak{U}_1$$

und

$$z = C_1\mathfrak{U}x \quad \text{oder} \quad z = C_1\mathfrak{U}_1.$$

Wir haben mithin gefunden:

Wenn für kein poſitives ganzes ε incl. $\varepsilon = \infty$ in der Gleichung

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a z x^{m-2}$$

$m = -1 \mp \frac{1}{\varepsilon}$ ist, so ist das allgemeine Integral derselben

78) $$z = C_1 . \mathfrak{N} x + C \mathfrak{N}_1 x^*);$$

*) Dieses Integral ist zuerst vom Herrn Professor Kummer auf einem anderen Wege gefunden und in dem Crelle'schen Journale, Band 12, Seite 144 veröffentlicht worden. Durch ein eigenthümliches Verfahren bringt er unter der Voraussetzung eines negativen a die Größen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ auf die Formen:

$$N = \int_0^1 (1-\vartheta^2)^{-\frac{m-2}{2m}} \cos\left(\frac{2\vartheta}{m}\sqrt{-a x^m}\right) \partial\vartheta,$$

$$N_1 = \int_0^1 (1-\vartheta^2)^{-\frac{m+2}{2m}} \cos\left(\frac{2\vartheta}{m}\sqrt{-a x^m}\right) \partial\vartheta.$$

Herr Professor Helmling zeigt in einer 1854 herausgegebenen Schrift, daß im Falle eines positiven a

$$z_1 = \int_{\frac{2a}{m}}^{\infty} e^{-u x^{\frac{1}{2}m}} \left(u^2 - \frac{4a^2}{m^2}\right)^{-\frac{m+2}{2m}} \partial u,$$

$$z_2 = \int_{-\frac{2a}{m}}^{+\frac{2a}{m}} e^{-u x^{\frac{1}{2}m}} \left(u^2 - \frac{4a^2}{m^2}\right)^{-\frac{m+2}{2m}} \partial u,$$

$$z_3 = z_1 . \int \frac{\partial x}{(z_1)^2} \quad \text{und} \quad z_4 = z_2 \int \frac{\partial x}{(z_2)^2}$$

particuläre Integrale der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a z x^{m-2}$ sind, so daß das allgemeine Integral derselben unter den folgenden sechs Gestalten erscheint:

$$z = A_1 z_1 + A_2 z_2 = A_1 z_1 + A_3 z_3 = A_1 z_1 + A_4 z_4$$
$$= A_2 z_2 + A_3 z_3 = A_2 z_2 + A_4 z_4 = A_3 z_3 + A_4 z_4.$$

Es ist aber nicht schwer, nachzuweisen, daß die fünf letzten Formen von z mit der ersten identisch sind, so daß in Wahrheit nur ein vollständiges Integral der Gleichung 2) existirt.

Daß, wenn z ein Integral derselben ist, auch $Z = z . \int \frac{\partial x}{z^2}$ ein Integral derselben ist, sieht man aus der sich durch Differentiation hieraus ergebenden Gleichung $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \frac{\partial x}{z^2}$; so daß man durch Substitution der hieraus folgenden Werthe von z und $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ in Gleichung 2) die Gleichung $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = a Z x^{m-2}$ erhält.

Digitized by Google

wenn aber $m=-\frac{1}{\varepsilon}$ oder $m=+\frac{1}{\varepsilon}$ für irgend ein positives ganzes ε exclusive $\varepsilon=\infty$ ist, so sind beziehungsweise

79) $$z=C_1.\mathfrak{U}x \text{ oder } z=C_1.\mathfrak{U}_1$$

particuläre Integrale jener Gleichung.

Um aber unsere Behauptung zu rechtfertigen, differentiiren wir die von Herrn Prof. Helmling aufgefundene Gleichung

$$\frac{Z}{z}=\int\frac{\partial x}{z^2}$$

nach x und erhalten

$$z.\frac{\partial Z}{\partial x}-Z.\frac{\partial z}{\partial x}=1.$$

Setzen wir nun $z=A.\mathfrak{U}x+B.\mathfrak{U}_1$, $Z=C.\mathfrak{U}x+D\mathfrak{U}_1$, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}.\{A.\mathfrak{S}x+B.\mathfrak{S}_1\},\quad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{x}.\{C.\mathfrak{S}x+D\mathfrak{S}_1\},$$

folglich

$$z.\frac{\partial Z}{\partial x}-Z.\frac{\partial z}{\partial x}=\{BC-AD\}.\{\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1-\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}\}=1.$$

Aus den Formeln 47) findet man aber

$$\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1-\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}=1;$$

so daß die für z und Z angenommenen Werthe der Gleichung

$$z.\frac{\partial Z}{\partial x}-Z.\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \text{also auch der Gleichung}\quad Z=z\int\frac{\partial x}{z^2}$$

genügen, sobald die Constanten A, B, C, D, so angenommen werden, daß sie der Gleichung $BC-AD=1$ genügen.

Ist aber $z=z_1$, so ist $Z=z_3$, und wenn $z=z_2$ ist, so ist $Z=z_4$.

Aus dem Vorhergehenden folgt die Identität der sechs für das vollständige Integral z gegebenen Ausdrücke.

Sehen wir bloß auf die Eigenschaft der Reihen 47), so giebt die Formel $\int\frac{\partial x}{z^2}=\frac{Z}{z}$ Folgendes:

Wenn die Constanten A, B, C, D die Gleichung $BC-AD=1$ erfüllen, so ist

$$\int\frac{\partial x}{(A\mathfrak{U}x+B\mathfrak{U}_1)^2}=\frac{C\mathfrak{U}x+D\mathfrak{U}_1}{A\mathfrak{U}x+B\mathfrak{U}_1},$$

weil

$$\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1-\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}=1$$

ist.

Digitized by Google

Durch C und C_1 werden willkürliche Constanten bezeichnet und die Größen U und U_1 haben die in 47) angegebenen Werthe.

§. 28.

Der Fall, wenn $m=0$ ist, mußte in dem vorigen §. ausgeschlossen werden, weil U und U_1 für $m=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden; und soll deßhalb hier besonders betrachtet werden. Wir haben hierbei drei Fälle zu unterscheiden.

I. $4a+1>0$.

Setzen wir der Kürze wegen $\pm\sqrt{4a+1}=k$, so giebt die Gl. 27)

$$y\partial x=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-k+(1+k)Cx^k}{x+Cx^{1+k}}\partial x=\frac{\tfrac{1}{2}.\{(1-k)x^{\frac{1}{2}(-1-k)}+(1+k).Cx^{\frac{1}{2}(-1+k)}\}\partial x}{x^{\frac{1}{2}(1-k)}+Cx^{\frac{1}{2}(1+k)}}.$$

Aber

$$\partial.\{x^{\frac{1}{2}(1-k)}+Cx^{\frac{1}{2}(1+k)}\}=\tfrac{1}{2}.\{(1-k)x^{\frac{1}{2}(-1-k)}+(1+k)Cx^{\frac{1}{2}(-1+k)}\}\partial x.$$

Daher

$$y\partial x=\frac{\partial.\{x^{\frac{1}{2}(1-k)}+Cx^{\frac{1}{2}(1+k)}\}}{x^{\frac{1}{2}(1-k)}+Cx^{\frac{1}{2}(1+k)}},$$

$$\int y\partial x=l.\{C_1.[x^{\frac{1}{2}(1-k)}+Cx^{\frac{1}{2}(1+k)}]\}.$$

Folglich

$$z=C_1.\{x^{\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{4a+1})}+Cx^{\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a+1})}\}.$$

II. $4a+1=0$.

Nach §. 28 ist

$$y\partial x=\tfrac{1}{2}\frac{\partial x}{x}+\frac{\partial x}{x(C+lx)}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial x}{x}+\frac{\partial.l.(xe^C)}{l(xe^C)},$$

folglich

$$\int y\partial x=l.\{C_1x^{\frac{1}{2}}l(xe^C)\}=l.\{C_1x^{\frac{1}{2}}(C+lx)\}$$

und

$$z=C_1x^{\frac{1}{2}}(C+lx).$$

III. $4a+1<0$.

Setzen wir der Kürze wegen $\sqrt{-4a-1}=k$, so giebt 29)

Digitized by Google

$$y\partial x = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\partial x}{x} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{k}{x}\operatorname{tng}(C + \tfrac{1}{2}k\,lx))\,\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial\cdot\cos(C+\frac{1}{2}k\,lx)}{\cos(C+\frac{1}{2}k\,lx)}.$$

Daher

$$\int y\partial x = l.\{C_1 x^{\frac{1}{2}}\cos(C + \tfrac{1}{2}k\,lx)\}.$$

Folglich

$$z = C_1 x^{\frac{1}{2}}\cos(C + \tfrac{1}{2}\sqrt{-4a-1}\,.\,lx).$$

Wir haben mithin gefunden:

Wenn in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = azx^{-2}$$

$4a+1>0$ oder $4a+1=0$ oder $4a+1<0$ ist, so ist beziehungsweise

80) $$z = C_1\cdot\{x^{\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{4a+1})} + Cx^{\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a+1})}\}$$

oder

81) $$z = C_1 x^{\frac{1}{2}}(C + lx)$$

oder

82) $$z = C_1 x^{\frac{1}{2}}\cos(C + \tfrac{1}{2}\sqrt{-4a-1}\,.\,lx)$$

das allgemeine Integral derselben, indem C und C_1 willkürliche Constanten bezeichnen.

§. 29.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir aus dem in §. 2 bewiesenen Satze die Folgerung für die z ziehen.

Zu dem Zwecke differentiiren wir die aus Gleichung 3) folgenden Gleichungen

$$\int y\partial x = lz,\ \int y_1\partial x_1 = lz_1$$

und erhalten

$$y\partial x = \frac{\partial z}{z},\quad y_1\partial x_1 = \frac{\partial z_1}{z_1}.$$

Substituirt man dieses in der Gl. $xy + x_1y_1 = 1$, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$\frac{x}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x_1}{z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_1}=1,$$

oder, weil $xx_1=1$, $\partial x_1=-x^{-2}\partial x$ ist:

$$\frac{\partial z}{z}=\frac{\partial z_1}{z_1}+\frac{\partial x}{x}.$$

Wenn daher k und k_1 zwei willkürliche Constanten bezeichnen, so folgt hieraus durch Integration

$$kz=k_1xz_1$$

oder, weil $xx_1=1$ ist:

$$kzx_1^{\frac{1}{2}}=k_1z_1x^{\frac{1}{2}}.$$

Daher der Satz:

Wenn in den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=azx^{m-2},\quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^{\,2}}=az_1x_1^{m_1-2}$$

$m+m_1=0$ ist, und $xx_1=1$ angenommen wird, so ist jederzeit

$$kzx_1^{\frac{1}{2}}=k_1z_1x^{\frac{1}{2}},$$

wo k und k_1 zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

§. 30.

Aus den im §. 24, wenn $m=2$ ist, für y gefundenen Werthen ist es leicht, die für das entsprechende z herzuleiten.

Denn nach 58) ist, wenn $a>0$:

$$y\partial x=\frac{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}}-1}{Ce^{\pm 2x\sqrt{a}}+1}\partial(\pm x\sqrt{a})=\frac{Ce^{\pm x\sqrt{a}}-e^{\mp x\sqrt{a}}}{Ce^{\pm x\sqrt{a}}+e^{\mp x\sqrt{a}}}\cdot\partial(\pm x\sqrt{a}),$$

$$y\partial x=\frac{\partial.\{Ce^{\pm x\sqrt{a}}+e^{\mp x\sqrt{a}}\}}{Ce^{\pm x\sqrt{a}}+e^{\mp x\sqrt{a}}}.$$

Daher

$$\int y\partial x=l.\{C_1(Ce^{\pm x\sqrt{a}}+e^{\mp x\sqrt{a}})\};$$

folglich

$$z=C_1.(Ce^{\pm x\sqrt{a}}+e^{\mp x\sqrt{a}})=Ce^{+x\sqrt{a}}+Ce_1{}^{-x\sqrt{a}}.$$

Wenn ferner $a=0$, so ist

$$y\partial x=\frac{\partial x}{x+C}=\frac{\partial.(x+C)}{x+C}.$$

Digitized by Google

Daher

$$\int y\partial x = l.\mathfrak{C}_1(x+\mathfrak{C});$$

und

$$z = \mathfrak{C}_1.(x+\mathfrak{C}),$$

(das vollständige Integral jeder Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.)

Wenn endlich $a<0$, so ist nach 58)

$$y\partial x = -\sqrt{-a}.\operatorname{tng}(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a})\partial x = \frac{\partial.\cos(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a})}{\cos(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a})}$$

Demnach

$$\int y\partial x = l.\{\mathfrak{C}_1\cos(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a}\},$$

$$z = \mathfrak{C}_1\cos(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a}).$$

D. i. Wenn in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = azx^{m-2}$$

$m=2$ ist, so ist, je nachdem $a>0$ oder $a<0$ ist, beziehungsweise

83) $$z = \mathfrak{C}e^{x\sqrt{a}} + \mathfrak{C}_1 e^{-x\sqrt{a}}$$

oder

84) $$z = \mathfrak{C}_1.\cos(\mathfrak{C}+x\sqrt{-a})$$

das vollständige Integral derselben.

Nach dem in §. 29 bewiesenen Satze folgt hieraus unmittelbar:

Wenn in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = azx^{m-2}$$

$m=-2$ ist, so ist, je nachdem $a>0$ oder $a<0$ ist, beziehungsweise

85) $$z = \mathfrak{C}xe^{x^{-1}\sqrt{a}} + \mathfrak{C}_1 xe^{x^{-1}\sqrt{a}}$$

oder

86) $$z = \mathfrak{C}_1.x\cos(\mathfrak{C}+x^{-1}\sqrt{-a})$$

das vollständige Integral derselben.

Digitized by Google

§. 31.

Wenn $m = \mp\frac{2}{2\varepsilon+1}$ ist, so haben wir in §. 25. für das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung geschlossene Ausdrücke erhalten, aus denen wir jetzt geschlossene Ausdrücke für z entwickeln wollen.

Der Fall $a=0$ soll im Folgenden nicht besonders in Betracht gezogen werden, weil in ihm, welchen Werth auch immer m haben mag, $z = \mathfrak{C}x + \mathfrak{C}_1$ ist.

Je nachdem aber $a > 0$ oder $a < 0$ ist, folgt, indem immer die Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen festgehalten wird, aus den Gleichungen 67) und 69)

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} + \frac{\pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(Z_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}Z_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(Z_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}Z_{\varepsilon-1})\}}{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})}$$

und

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} + \frac{\pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\{Z_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - Z_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})\}}{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})}$$

Weil ferner nach Gleichung 60) $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \mp\frac{2}{2\varepsilon+1}\cdot\frac{\lambda}{x}$ ist, so erhält man

$$\partial.\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})\}$$

$$= \pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\cdot\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}\{\lambda(N_{\varepsilon-1} - 2\frac{\partial N_\varepsilon}{\partial\lambda}) - \lambda^{\frac{1}{2}}(N_{\varepsilon-1} + 2\lambda\frac{\partial N_{\varepsilon-1}}{\partial\lambda} - N_\varepsilon)\} \\ -e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}.\{\lambda(N_{\varepsilon-1} - 2\frac{\partial N_\varepsilon}{\partial\lambda}) + \lambda^{\frac{1}{2}}(N_{\varepsilon-1} + 2\lambda\frac{\partial N_{\varepsilon-1}}{\partial\lambda} - N_\varepsilon)\} \end{array}\right\}$$

und

$$\partial.\{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})\}$$

$$= \pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\cdot\left\{\begin{array}{l} \lambda\{N_{\varepsilon-1} - 2\frac{\partial N_\varepsilon}{\partial\lambda}\}\sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) \\ -\sqrt{-\lambda}\{N_{\varepsilon-1} + 2\lambda\frac{\partial N_{\varepsilon-1}}{\partial\lambda} - N_\varepsilon\}\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) \end{array}\right\}.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 63) und 64) nach λ erhält man aber:

Digitized by Google

$$\frac{\partial N_\varepsilon}{\partial\lambda} = (\varepsilon-1).3.5....(2\varepsilon-3) + (\varepsilon-3).(\varepsilon-2)_1.5.7....(2\varepsilon-5).\lambda$$
$$+ (\varepsilon-5).(\varepsilon-3)_2.7.9....(2\varepsilon-7)\lambda^2 + \ldots.$$
$$\frac{\partial N_{\varepsilon-1}}{\partial\lambda} = (\varepsilon-2).5.7.9....(2\varepsilon-3) + (\varepsilon-4).(\varepsilon-3)_1.7.9....(2\varepsilon-5).\lambda$$
$$+ (\varepsilon-6).(\varepsilon-4)_2.9.11....(2\varepsilon-7).\lambda^2 + \ldots.$$

und durch Verbindung dieser Gleichungen mit 63) und 64)

87)
$$\begin{cases} \lambda(N_{\varepsilon-1} - 2\dfrac{\partial N_\varepsilon}{\partial\lambda}) = Z_\varepsilon, \\ N_{\varepsilon-1} + 2\lambda\dfrac{\partial N_{\varepsilon-1}}{\partial\lambda} - N_\varepsilon = Z_{\varepsilon-1}. \end{cases}$$

Daher:

$$\partial.\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})\}$$
$$= \pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\cdot\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(Z_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}Z_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(Z_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}Z_{\varepsilon-1})\},$$
$$\partial.\{N_\varepsilon \sin(L+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(L+\sqrt{-\lambda})\}$$
$$= \pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x}\cdot\{Z_\varepsilon \sin(L+\sqrt{-\lambda}) - Z_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(L+\sqrt{-\lambda})\}.$$

Substituirt man jetzt in den obigen Gleichungen für $y\partial x$, so erhält man

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} + \frac{\partial.\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})\}}{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})}$$

und

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} + \frac{\partial.\{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})\}}{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})}.$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt:

$$\int y\partial x = l.[\mathfrak{C}_1 x^{\frac{1}{2}(1\pm1)}.\{\mathfrak{C}e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}}N_{\varepsilon-1})\}]$$

und

$$\int y\partial x = l.[\mathfrak{C}_1 x^{\frac{1}{2}(1\pm1)}.\{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}.\cos(\mathfrak{C}+\sqrt{-\lambda})\}].$$

Nimmt man jetzt hinzu, daß $z = e^{\int y\partial x}$ ist, so folgt:

Wenn in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = azx^{m-2}$$

Digitized by Google

$m = \mp\frac{2}{2\varepsilon+1}$ ist, indem ε eine positive ganze Zahl exclusive Null bezeichnet, so ist für $a>0$ oder $a<0$ beziehungsweise

88) $$z = \mathfrak{C}_1 . x^{\frac{1}{2}(1\pm1)} . \{\mathfrak{C} e^{\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon - \lambda^{\frac{1}{2}} N_{\varepsilon-1}) - e^{-\lambda^{\frac{1}{2}}}(N_\varepsilon + \lambda^{\frac{1}{2}} N_{\varepsilon-1})\}$$

oder

89)

$$z = \mathfrak{C}_1 . x^{\frac{1}{2}(1\pm1)} . \{N_\varepsilon \sin(\mathfrak{C} + \sqrt{-\lambda}) - N_{\varepsilon-1}\sqrt{-\lambda}\cos(\mathfrak{C} + \sqrt{-\lambda})\}$$

das vollständige Integral derselben. — Die Größen λ, N_ε, $N_{\varepsilon-1}$ haben die in den Formeln 60), 63), 64) angegebenen Werthe.

Daß die Formeln 88) und 89) mit der Formel 78) für $m = \mp\frac{2}{2\varepsilon+1}$ identisch sind, bedarf keiner weiteren Ausführung.

§. 32.

Will man schließlich aus den in §. 26. gefundenen particulären Integralen der Gleichung 1) Werthe von z herleiten, so geben die Gleichungen 75) und 76), wenn durch μ die positive oder negative Einheit bezeichnet wird:

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} \pm \frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x} \cdot \frac{\mathfrak{S}_{2\varepsilon} + \mu\lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon+1)}}{\mathfrak{U}_{2\varepsilon}}$$

oder, weil, wie man aus 60) und 73) sofort sieht,

$$\pm\frac{\partial x}{(2\varepsilon+1)x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\lambda},\quad \partial . \mathfrak{U}_{2\varepsilon} = -\frac{\partial\lambda}{\lambda}\cdot\mathfrak{S}_2$$

ist, wenn man noch die Gleichung 77) hinzu nimmt,

$$y\partial x = \frac{\frac{1}{2}(1\pm1)\partial x}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}_{2\varepsilon}}{\mathfrak{U}_{2\varepsilon}} - \frac{1}{2}\mu\cdot\frac{\partial X}{X}.$$

Daher

$$\int y\partial x = 1 . \{\mathfrak{C} x^{\frac{1}{2}(1\pm1)} . (\mathfrak{U}_{2\varepsilon}^2)^{\frac{1}{4}} . (X^{-2\mu})^{\frac{1}{4}}\}.^*)$$

Hieraus folgen für z, je nachdem man $\mu = +1$ oder $\mu = -1$ nimmt, die beiden particulären Integrale

---

*) Wir schreiben hier so, um nicht den Logarithmus einer imaginären Größe zu erhalten.

Digitized by Google

$$z_1 = \mathfrak{C} x^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)} . (\mathfrak{U}_{2\varepsilon}^2)^{\frac{1}{4}} . (X^{-2})^{\frac{1}{4}},$$

$$z_2 = \mathfrak{C}_1 x^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)} . (\mathfrak{U}_{2\varepsilon}^2)^{\frac{1}{4}} . (X^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Weil nun

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = a z_1 x^{m-2}, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} = a z_2 x^{m-2},$$

also

$$\frac{\partial^2 . (z_1 + z_2)}{\partial x^2} = a (z_1 + z_2) . x^{m-2}$$

ist, so sieht man, daß $z = z_1 + z_2$ das vollständige Integral ist. Daher:

Wenn in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a z x^{m-2}$$

$m = \mp \frac{2}{2\varepsilon + 1}$ ist, indem ε eine positive ganze Zahl exclusive Null bezeichnet, so kann man z unter der Form

90) $$z = x^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)} . (\mathfrak{U}_{2\varepsilon}^2)^{\frac{1}{4}} . \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1 X^2}{(X^2)^{\frac{1}{4}}}$$

darstellen, indem $\mathfrak{U}_{2\varepsilon}$ den in 73) angegebenen Werth hat und X aus der Gleichung 77) oder der daraus folgenden Gleichung

91) $$X = e^{\int \frac{\lambda^{\frac{1}{2}(2\varepsilon-1)}}{\mathfrak{U}_{2\varepsilon}} \partial\lambda}$$

entwickelt werden muß.

§. 33.

Wir haben es oben unterlassen, eine sehr einfache Relation zwischen den durch die Formeln 63) und 64) bestimmten Größen N_ε, $N_{\varepsilon-1}$ und der durch die Formel 73) bestimmten $\mathfrak{U}_{2\varepsilon}$ nachzuweisen, welche von einigem Interesse sein dürfte; um nicht den Gang der Untersuchung zu unterbrechen. Wir wollen sie hier folgen lassen; und benutzen die folgenden Sätze über Kettenbrüche:

I. Bei den beiden Kettenbrüchen

Digitized by Google

$$\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon} = \alpha_1 : |a_1 + \alpha_2 : |a_2 + \alpha_3 : |a_3 + \ldots + \alpha_\varepsilon : |a_\varepsilon,$$

$$\frac{Z'_\varepsilon}{N'_\varepsilon} = \alpha'_1 : |a_\varepsilon + \alpha_\varepsilon : |a_{\varepsilon-1} + \alpha_{\varepsilon-1} : |a_{\varepsilon-2} + \ldots + \alpha_2 : |a_1$$

finden die Relationen

$$N_\varepsilon = N'_\varepsilon,\ Z_\varepsilon = \alpha_1 . N'_{\varepsilon-1},\ \alpha'_1 . N_{\varepsilon-1} = Z'_\varepsilon,\ \alpha'_1 . Z_{\varepsilon-1} = \alpha_1 . Z'_{\varepsilon-1}$$

Statt.

II. Bei den beiden Kettenbrüchen

$$\frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon} = \alpha_1 : |a_1 + \alpha_2 : |a_2 + \alpha_3 : |a_3 + \ldots + \alpha_\varepsilon : |a_\varepsilon,$$

$$\frac{Z''_\varepsilon}{N''_\varepsilon} = \alpha_1 : |-a_1 + \alpha_2 : |-a_2 + \alpha_3 : |-a_3 + \ldots + \alpha_\varepsilon : |-a_\varepsilon$$

ist für jedes ε

$$N_\varepsilon = (-1)^\varepsilon . N''_\varepsilon,\ Z_\varepsilon = (-1)^{\varepsilon-1} Z''_\varepsilon.$$

Setzen wir ferner

$$F_{\varepsilon+n} = \alpha_1 : |a_1 + \alpha_2 : |a_2 + \alpha_3 : |a_3 + \ldots + \alpha_\varepsilon : |a_\varepsilon + F^{(\varepsilon)}{}_n,$$

$$F^{(\varepsilon)}{}_n = \alpha_{\varepsilon+1} : |a_{\varepsilon+1} + \alpha_{\varepsilon+2} : |a_{\varepsilon+2} + \ldots + \alpha_{\varepsilon+n} : |a_{\varepsilon+n},$$

so ist bekanntlich

$$F_{\varepsilon+n} = \frac{(a_\varepsilon + F^{(\varepsilon)}{}_n) Z_{\varepsilon-1} + \alpha_\varepsilon . Z_{\varepsilon-2}}{(a_\varepsilon + F^{(\varepsilon)}{}_n) . N_{\varepsilon-1} + \alpha_\varepsilon . N_{\varepsilon-2}} = \frac{Z_\varepsilon + Z_{\varepsilon-1} . F^{(\varepsilon)}{}_n}{N_\varepsilon + N_{\varepsilon-1} . F^{(\varepsilon)}{}_n} = \frac{Z_\varepsilon . N^{(\varepsilon)}{}_n + Z_{\varepsilon-1} . Z^{(\varepsilon)}{}_n}{N_\varepsilon . N^{(\varepsilon)}{}_n + N_{\varepsilon-1} . Z^{(\varepsilon)}{}_n},$$

also

$$Z_{\varepsilon+n} = Z_\varepsilon . N^{(\varepsilon)}{}_n + Z_{\varepsilon-1} . Z^{(\varepsilon)}{}_n,\ N_{\varepsilon+n} = N_\varepsilon . N^{(\varepsilon)}{}_n + N_{\varepsilon-1} . Z^{(\varepsilon)}{}_n.$$

Wenn daher $\varepsilon = m$, $\alpha_2 = \alpha_{2\varepsilon}$, $\alpha_3 = \alpha_{2\varepsilon-1}$, ..., $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\varepsilon+2}$ und $a_1 = -a_{2\varepsilon}$, $a_2 = -a_{2\varepsilon-1}$, $a_3 = -a_{2\varepsilon-2}$, $a_4 = -a_{2\varepsilon-3}$, ..., $a_\varepsilon = -a_{\varepsilon+1}$ ist, so haben wir nach den beiden angeführten Sätzen die Relationen

$$N^{(\varepsilon)}{}_\varepsilon = (-1)^\varepsilon N_\varepsilon,\ Z^{(\varepsilon)}{}_\varepsilon = (-1)^{\varepsilon-1} \alpha_{\varepsilon+1} N_{\varepsilon-1}.$$

Daher die Gleichungen

$$Z_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon \{Z_\varepsilon N_\varepsilon - \alpha_{\varepsilon+1} Z_{\varepsilon-1} N_{\varepsilon-1}\},\ N_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon . \{N_\varepsilon{}^2 - \alpha_{\varepsilon+1} . N_{\varepsilon-1}{}^2\},$$

welche für jeden Kettenbruch von der Form

Digitized by Google

$$F_{2\varepsilon} = \alpha_1 : | a_1 + \alpha_2 : | a_2 + \alpha_3 : | a_3 + \ldots$$
$$+ \alpha_\varepsilon : | a_\varepsilon + \alpha_{\varepsilon+1} : | - a_\varepsilon + \alpha_\varepsilon : | - a_{\varepsilon-1} + \alpha_{\varepsilon-1} : | - a_{\varepsilon-2} + \ldots + \alpha_3 : | - a_2 + \alpha_2 : | - a_1$$

gelten.

Wenden wir dieſes jetzt auf den Kettenbruch

$$F_{2\varepsilon} = \lambda : | 2\varepsilon - 1 + \lambda : | 2\varepsilon - 3 + \lambda : | 2\varepsilon - 5 + \ldots + \lambda : | - (2\varepsilon - 3) + \lambda : | - (2\varepsilon - 1).$$

an, ſo erhalten wir

$$Z_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon . | Z_\varepsilon N_\varepsilon - \lambda Z_{\varepsilon-1} N_{\varepsilon-1} |, \quad N_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon . | N_\varepsilon^2 - \lambda N_{\varepsilon-1}^2 |,$$

wo Z_ε, $Z_{\varepsilon-1}$, N_ε, $N_{\varepsilon-1}$ die in 63) und 64) angegebenen Werthe haben und $\mathfrak{Z}_{2\varepsilon}$, $\mathfrak{N}_{2\varepsilon}$, wie man aus §. 26. und §. 33. II. ſieht, durch die Gleichungen

$$Z_{2\varepsilon} = (-1)^{2\varepsilon-1} . (-1)^{\varepsilon-1} \mathfrak{Z}_{2\varepsilon}, \quad N_{2\varepsilon} = (-1)^{2\varepsilon} . (-1)^\varepsilon . \mathfrak{N}_{2\varepsilon}$$

oder

$$Z_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon . \mathfrak{Z}_{2\varepsilon}, \quad N_{2\varepsilon} = (-1)^\varepsilon . \mathfrak{N}_{2\varepsilon}$$

beſtimmt werden.

Das Reſultat unſerer Betrachtung iſt alſo folgendes:

Zwiſchen den durch die Formeln 63) und 64) beſtimmten Größen Z_ε, $Z_{\varepsilon-1}$, N_ε, $N_{\varepsilon-1}$ und den durch die Formeln 73) beſtimmten Größen $\mathfrak{Z}_{2\varepsilon}$, $\mathfrak{N}_{2\varepsilon}$ finden die Relationen:

92)
$$\begin{cases} \mathfrak{Z}_{2\varepsilon} = Z_\varepsilon N_\varepsilon - \lambda Z_{\varepsilon-1} N_{\varepsilon-1}, \\ \mathfrak{N}_{2\varepsilon} = N_\varepsilon^2 - \lambda N_{\varepsilon-1}^2 \end{cases}$$

Statt.

Digitized by Google

Anhang.

Ausdrücke für die Functionen e^x und $\operatorname{tng} x$ in unendlichen Kettenbrüchen.

§. 34.

Da die Formel 58) für $m=2$ und $a>0$ an ihrer Allgemeinheit Nichts verliert, wenn man nur die oberen Zeichen nimmt, so haben wir aus derselben die Gleichung

$$xy = x\sqrt{a}\cdot\frac{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}-1}{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}+1}.$$

Desgleichen giebt die Formel 55)

$$xy = \frac{u + CXu_1}{1 + CX},$$

wo nach 43) und 44)

$$u = 1 + ax^2:|3 + ax^2:|5 + ax^2:|7 + ax^2:|9 + \ldots.,$$

$$u_1 = ax^2:|1 + ax^2:|3 + ax^2:|5 + ax^2:|7 + \ldots.$$

gesetzt werden muß.

Da die beiden Formeln, durch welche xy dargestellt wird, identisch sind, so ist für jedes x

$$x\sqrt{a}\cdot\frac{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}-1}{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}+1} = \frac{u + CXu_1}{1 + CX}$$

oder wenn man aus 54) für X seinen Werth $\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}x}$ setzt:

$$x\sqrt{a}\cdot\frac{\mathfrak{L}e^{2x\sqrt{a}}-1}{\mathfrak{L}e^{2x\sqrt{a}}+1} = \frac{\mathfrak{U}ux + C\mathfrak{U}_1 u_1}{\mathfrak{U}x + C\mathfrak{U}_1}$$

Digitized by Google

oder

$$\sqrt{a}\cdot\frac{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}-1}{\mathfrak{C}e^{2x\sqrt{a}}+1}=\frac{\mathfrak{U}u+\mathfrak{C}\mathfrak{U}_1\frac{u_1}{x}}{\mathfrak{U}x+\mathfrak{C}\mathfrak{U}_1}.$$

Da ferner für $x=0$, wie man aus 47) und dem Obigen sogleich übersieht, $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_1=u=e^{2x\sqrt{a}}=1$ und $\frac{u_1}{x}=0$ ist, und unsere Gleichung für jedes x gilt, so folgt

$$\sqrt{a}\cdot\frac{\mathfrak{C}-1}{\mathfrak{C}+1}=\frac{1}{C}$$

oder

$$\mathfrak{C}=\frac{C\sqrt{a}+1}{C\sqrt{a}-1}.$$

Daher ist beziehungsweise $\mathfrak{C}=-1$ und $\mathfrak{C}=+1$ für $C=0$ und $C=\infty$. Folglich

$$x\sqrt{a}\cdot\frac{e^{2x\sqrt{a}}+1}{e^{2x\sqrt{a}}-1}=u,\quad x\sqrt{a}\cdot\frac{e^{2x\sqrt{a}}-1}{e^{2x\sqrt{a}}+1}=u_1;$$

welche beiden Gleichungen, weil aus ihnen, so wie aus den oben für u und u_1 angegebenen Werthen, $uu_1=ax^2$ folgt, offenbar dasselbe aussagen.

Schreiben wir daher jetzt x für $x\sqrt{a}$, so ergiebt sich, da wir oben bewiesen haben, daß die Kettenbrüche u und u_1 für jedes x convergiren:

Die Formel

93) $$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=x:|1+x^2:|3+x^2:|5+x^2:|7+x^2:|9+\ldots.$$

gilt für jedes positive oder negative, ganze od. gebrochene x.

§. 35.

Setzt man

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\omega,$$

so erhält man

$$\omega=\frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1};$$

oder auch

$$\frac{1}{\omega}=\frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt beziehungsweise

$$e^{2x} = -1 + 2:|1 - \omega$$

und

$$e^{2x} = +1 + 2:|-1 + 1:|\omega$$

d. i.

94)

$$e^{2x} = -1 + 2:|1 - x:|1 + x^2:|3 + x^2:|5 + x^2:|7 + x^2:|9 + \ldots.$$

und

95) $$e^{2x} = 1 + 2x:|1 - x + x^2:|3 + x^2:|5 + x^2:|7 + x^2:|9 + \ldots.$$

Setzen wir aber $\frac{1}{2}x$ für x und erweitern die Kettenbrüche mit 2, so erhalten wir:

96) $$e^x = -1 + 2:|1 - x:|2 + x^2:|6 + x^2:|10 + x^2:|14 + \ldots.,$$

und

97)

$$e^x = 1 + 2x:|2 - x + x^2:|6 + x^2:|10 + x^2:|14 + x^2:|18 + \ldots.$$

Die Formeln 95) und 97) sind zur Berechnung von e^x vortheilhafter, als die Formeln 94) 96) weil der 2te, 3te, 4te, ..., ste Näherungsbruch in jenen immer erst der 3te, 4te, 5te ...., $(\varepsilon+1)$te Näherungsbruch in diesen ist.

Aus 95) und 97) folgt für $x=1$:

98) $$e^2 = 7 + 2:|5 + 1:|7 + 1:|9 + 1:|11 + \ldots,$$

99) $$e = 1 + 2:|1 + 1:|6 + 1:|10 + 1:|14 + 1:|18 + \ldots.$$

§. 36.

Um die Größe des Fehlers zu beurtheilen, welchen man begeht, wenn man bei der Anwendung der Formel 97) zur Berechnung von e^x den sten Näherungsbruch nimmt; wollen wir zunächst nachweisen, daß vom 2ten Näherungsnenner an alle Näherungsnenner $N_2, N_3, N_4, \ldots.$ für jedes $x \overset{=}{<} 4{,}644326$ größer als Null sind.

Von N_1 kann dieses nicht behauptet werden. Vielmehr ist $N_1 = 2 - x$ negativ, sobald $x > 2$ ist.

Aber $N_2 = 12 - 6x + x^2$. Die beiden Wurzeln der Gleichung $N_2 = 0$

Digitized by Google

sind $x = 3 \pm \sqrt{-3}$. Da also die ganze rationale algebraische Function N_2 für kein reelles x verschwindet und $N_2 = 12$ für $x = 0$ ist, so folgt, daß N_2 für jedes reelle x positiv ist.

Ferner ist

$$N_3 = 10 . N_2 + x^2 N_1 = 120 - 60x + 12x^2 - x^3.$$

Die Gleichung $N_3 = 0$ hat nur eine reelle Wurzel

$$x = 4 + \sqrt[3]{2\sqrt{20} + 4} - \sqrt[3]{2\sqrt{20} - 4} = 4{,}644326\ldots.$$

Es geht daher N_3 nur einmal, und zwar bei diesem Werthe von x, durch Null hindurch, ist folglich, weil $N_3 = +120$ für $x = 0$, für alle Werthe von x, welche kleiner als 4,644326.... sind, positiv.

Für diese Werthe ist also $N_2 > 0$, $N_3 \overset{=}{>} 0$, daher

$$N_4 = 14 . N_3 + x^2 N_2 > 0, \quad N_5 = 18 . N_4 + x^2 N_3 > 0,$$

u. s. w. allgemein $N_\varepsilon > 0$; was bewiesen werden sollte.

Sei ferner $x > 4{,}644326\ldots$, so hat dennoch die Formel 97) Gültigkeit für jedes x, weil sie aus der allgemein gültigen Formel 93) abgeleitet ist. Es müssen deßhalb, wie groß auch x sein mag, von irgend einem Werthe des ε an alle Näherungsnenner N_ε positiv sein, weil, da für $x > 0$ $e^x > 1$ ist, der zu 1 addirte Kettenbruch positiv ist, und sein von dem ersten Theilnenner $2 - x$ nicht abhängiger, also aus lauter positiven Summanden bestehender Näherungszähler für jedes ε positiv ist.

(Daß ferner N_ε für irgend ein x verschwinde, hindert die Anwendbarkeit der Formel 97) nicht, weil dieses wohl den εten Näherungsbruch angeht, aber nicht den Kettenbruch.)

Sind aber erst zwei auf einander folgende Näherungsnenner positiv, so sieht man aus der Formel

$$N_{\varepsilon+1} = (4\varepsilon + 2) N_\varepsilon + x^2 N_{\varepsilon-1},$$

welche für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, daß dann auch alle folgenden positiv sind.

Bezeichnen wir jetzt den εten Näherungsbruch durch F_ε, so ist nach einem bekannten Satze über die Kettenbrüche

$$F_n - F_\varepsilon = (-1)^\varepsilon . 2x^{2\varepsilon+1} . \frac{N^{(\varepsilon+1)}_{n-\varepsilon-1}}{N_\varepsilon . N_n},$$

wo durch $N^{(\varepsilon+1)}_{n-\varepsilon-1}$ der $(n - \varepsilon - 1)$te Näherungsnenner des Kettenbruches

Digitized by Google

$$x^2:|4\varepsilon+6+x^2:|4\varepsilon+10+x^2:|4\varepsilon+14|\ldots.$$

bezeichnet wird.

Ferner ist

$$F_n - F_{\varepsilon+1} = (-1)^{\varepsilon+1}.2x^{2\varepsilon+3}.\frac{N_{n-\varepsilon-2}^{(\varepsilon+2)}}{N_{\varepsilon+1}N_n}.$$

Sei daher ε so groß angenommen, daß N_ε, $N_{\varepsilon+1}$, $N_{\varepsilon+2}$, ... sämmtlich positiv sind, so ist, weil offenbar $N_{n-\varepsilon-1}^{(\varepsilon+1)}$ für jedes ε positiv ist, unzweifelhaft das Produkt $|F_\varepsilon - F_n|.|F_n - F_{\varepsilon+1}|$ ebenfalls eine positive Größe, wie groß man auch n nehmen mag.

Weil nun $\mathrm{Lim}.F_n = e^x$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden $|F_\varepsilon - e^x||e^x - F_{\varepsilon+1}|$ eine positive Größe, also e^x eine Mittelgröße zwischen F_ε und $F_{\varepsilon+1}$. Hieraus folgt, weil unter den gemachten Voraussetzungen F_ε und $F_{\varepsilon+1}$ positiv sind, daß der Fehler, welchen man begeht, wenn man $e^x = F_\varepsilon$ setzt, kleiner ist, als $\mathrm{val.abs.}|F_{\varepsilon-1} - F_\varepsilon|$.

Es ist aber bekanntlich

$$F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon = (-1)^\varepsilon.\frac{2x^{2\varepsilon+1}}{N_\varepsilon.N_{\varepsilon+1}}.$$

Daher der Satz:

Wenn $x \leqq 4 + \sqrt[3]{2\sqrt{20}+4} - \sqrt[3]{2\sqrt{20}-4}$ oder, was dasselbe ist, wenn $x \leqq 4{,}644326\ldots.$ ist; oder falls x größer ist, wenn man ε so groß genommen hat, daß für es und alle größeren ε $N_\varepsilon > 0$ ist, so begeht man, indem man in der Formel 97) den εten Näherungsbruch $= e^x$ setzt, einen Fehler φ_ε, welcher kleiner als

$$\mathrm{val.abs.}\frac{2x^{2\varepsilon+1}}{N_\varepsilon.N_{\varepsilon+1}}$$

ist.

Beabsichtigen wir z. B. e nach der Formel 99) zu berechnen, so sind die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$2:|1+1:|6+1:|10+1:|14+\ldots.$$

nach der Reihe

$$F_1 = \frac{2}{1},\quad F_2 = \frac{12}{7},\quad F_3 = \frac{122}{71},\quad F_4 = \frac{1720}{1001},\quad F_5 = \frac{31082}{18089},$$

$$F_6 = \frac{685524}{398959};$$

Digitized by Google

Setzt man daher $e = 1 + F_4 = 2\frac{719}{1001}$, so ist nach dem Obigen der Fehler $\varphi_4 < \frac{2}{1001.18089}$, $\varphi_4 < \frac{1}{9053544,5}$, also der Werth von e noch in der 6ten Decimalstelle richtig. Setzt man aber $e = 1 + F_5 = 2\frac{12993}{18089}$, so ist der Fehler $\varphi_5 < \frac{2}{18089.398959}$ d. i. $\varphi_5 < \frac{1}{3608384675,5}$, also der Werth von e noch in der 9ten Decimalstelle richtig.

Man sieht hieraus, daß die Formel 99) zur Berechnung von e bedeutende Vortheile gegen die bekannte Formel

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

gewährt. Denn erstens rechnet es sich bequemer nach jener; und zweitens ist der Fehler wenn man $t_\varepsilon = \frac{1}{1.2.3\ldots.\varepsilon}$ und $e = 1 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_\varepsilon + \psi_\varepsilon$ setzt, aus deren Ungleichung $\psi_\varepsilon < \frac{1}{1.2.3\ldots.\varepsilon(\varepsilon+1)} \cdot \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}$ zu beurtheilen. Dies giebt z. B. für $\varepsilon = 10$ $\psi_{10} < \frac{1}{36590400}$, also erst eine Genauigkeit der ersten 7 Decimalstellen.

Daß Aehnliches für jede Potenz e^x von e gilt, fällt in die Augen.

Will man den $(\varepsilon+1)$ten Näherungswerth in der Formel 97) independent berechnen, so hat man, indem man

$$\frac{Z'_\varepsilon}{N'_\varepsilon} = x^2 : \{6 + x^2 : \{10 + x^2 : \{14 + \ldots. + x^2 : \{4\varepsilon + 2,$$

also nach 37) und 38)

100)

$$Z'_\varepsilon = 10.14\ldots.(4\varepsilon+2)x^2 + (\varepsilon-2)_1.14.18\ldots.(4\varepsilon-2).x^4 + (\varepsilon-3)_2.18.22\ldots.(4\varepsilon-6).x^6 + (\varepsilon-4)_3.22.26\ldots.(4\varepsilon-10).x^8 + \ldots.$$

$$N'_\varepsilon = 6.10\ldots.(4\varepsilon+2) + (\varepsilon-1)_1.10.14\ldots.(4\varepsilon-2).x^2 + (\varepsilon-2)_2.14.18\ldots.(4\varepsilon-6).x^4 + (\varepsilon-3)_3.18.22\ldots.(4\varepsilon-10).x^6\ldots.$$

setzt, die Formel

101) $$e^x = 1 + \frac{2xN'_\varepsilon}{(2-x)N'_\varepsilon + Z'_\varepsilon}.$$

Digitized by Google

§. 37.

Indem wir jetzt den Kettenbruch, durch welchen sich tng x ausdrücken läßt, auffuchen wollen, vergleichen wir die Ausdrücke 58) und 55) für $m=2$, $a<0$, und erhalten

$$y=-\sqrt{-a}.\operatorname{tng}(C+x\sqrt{-a})=\frac{\mathfrak{U}u+C\mathfrak{U}_1\cdot\frac{u_1}{x}}{\mathfrak{U}x+C\mathfrak{U}_1},$$

wo $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, u, u_1 wieder die in §. 34. angegebenen Werthe haben.

Da diese Gleichung für jedes x gilt, so gilt sie auch für $x=0$. Folglich, weil $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_1=u=1$ für $x=0$ und $\frac{u_1}{x}=0$ für $x=0$ ist,

$$-\sqrt{-a}.\operatorname{tng}C=\frac{1}{C},\quad C=-\operatorname{Arc}\cot(C\sqrt{-a}).$$

Daher ist $C=-\frac{1}{2}(2n+1)\pi$ für $C=0$ und $C=-2n\pi$ für $C=\infty$, und wir erhalten

$$-\sqrt{-a}\operatorname{tng}.(-\tfrac{1}{2}(2n+1)\pi+x\sqrt{-a})=\frac{u}{x},$$

$$-\sqrt{-a}.\operatorname{tng}.(-2n\pi+x\sqrt{-a})=\frac{u_1}{x};$$

d. i. beziehungsweise

$$x\sqrt{-a}\cot(x\sqrt{-a})=u,\quad x\sqrt{-a}.\operatorname{tng}(x\sqrt{-a})=-u_1.$$

Diese Gleichungen ergeben durch Multiplication $ax^2=uu_1$, was sich auch aus den Ausdrücken für u und u_1 in §. 34. findet. Daher sagen sie dasselbe aus.

Setzen wir aber jetzt x für $x\sqrt{-a}$, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

Es ist für jedes x

102) $$\operatorname{tng}x=x:|1-x^2:|3-x^2:|5-x^2:|7-x^2:|9-\ldots.$$

Hat man hieraus tng x berechnet, so findet man die übrigen goniometrischen Functionen nach den Formeln

$$\cot(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\operatorname{tng}x,\quad \sin 2x=\frac{2\operatorname{tng}x}{1+\operatorname{tng}x^2},\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\sin x$$

deren Fehler im Folgenden ebenso wie der der Formel 102), ermittelt werden sollen.

Digitized by Google

§. 38.

Die Fehler der Formeln für $\cot x$ und $\cos x$ sind offenbar unter dem Fall der Fehler der Formeln für $\operatorname{tng} x$ und $\sin x$ mit enthalten und bedürfen daher keiner besonderen Betrachtung.

Ferner erhält man durch Differentiation der Formel für $\sin 2x$ nach $\operatorname{tng} x$, daß $\partial.\sin 2x = 2\cos x^2 \cos 2x.\partial.\operatorname{tng} x$. Dies ist bekanntlich die Relation zwischen den Fehlern $\partial.\sin 2x$, $\partial.\operatorname{tng} x$ von $\sin 2x$ und $\operatorname{tng} x$, wenn $\partial.\operatorname{tng} x$ klein genug ist, um die höheren Potenzen dieser Größe vernachlässigen zu dürfen. Ist dies aber der Fall, so sieht man, daß die in Rede stehende Formel für $\sin 2x$ den Werth dieser Function höchstens mit einem doppelt so großen Fehler giebt, als der Fehler von $\operatorname{tng} x$ beträgt.

Wir wollen uns jetzt eine Einsicht in die Größe des Fehlers von $\operatorname{tng} x$, wenn hierfür der εte Näherungsbruch der Formel 102) gesetzt wird, zu verschaffen suchen, und nehmen hierbei an, daß $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ sei. Eine Annahme, welche bekanntlich nicht weiter ausgedehnt zu werden braucht, um alle Werthe, welche $\operatorname{tng} x$ haben kann, zu finden.

Bezeichnen wir den εten Näherungsbruch des Kettenbruches in der Formel 102) durch $F_\varepsilon = \frac{Z_\varepsilon}{N_\varepsilon}$, so ist nach 37) und 38) für jedes x

103)

$$Z_\varepsilon = 3.5.7....(2\varepsilon-1).x - (\varepsilon-2)_1.5.7....(2\varepsilon-3).x^3 + (\varepsilon-3)_2.7.9....(2\varepsilon-5).x^5 + (\varepsilon-4)_3.9.11....(2\varepsilon-7).x^7 + ...,$$

$$N_\varepsilon = 1.3.5....(2\varepsilon-1) - (\varepsilon-1)_1\ 3.5....(2\varepsilon-3).x^2 + (\varepsilon-2)_2.5.7....(2\varepsilon-5).x^4 - (\varepsilon-3)_3.7.9....(2\varepsilon-7).x^6 + ...$$

Ferner überzeugt man sich durch die Formeln 40) und 41) leicht, daß für jedes x

104)

$$\sin x = \operatorname{Lim}.\frac{Z_\varepsilon}{3.5.7....(2\varepsilon-1)}, \quad \cos x = \operatorname{Lim}.\frac{N_\varepsilon}{1.3.5.7....(2\varepsilon-1)}$$

ist.

Da $\cos x$ für keinen Werth von x, welcher der Bedingung $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ genügt verschwindet und stets positiv ist, so sieht man aus der Gleichung 104), daß N_ε von irgend einem Werthe des ε an fortwährend

Digitized by Google

wachsen und positiv sein muß. Daher wird immer der Fall eintreten, daß $N_\varepsilon > N_{\varepsilon-1}$ ist.

Aber nach der Theorie der Kettenbrüche

$$N_{\varepsilon+1} = (2\varepsilon+1)N_\varepsilon - x^2 N_{\varepsilon-1};$$

folglich

$$N_{\varepsilon+1} > (2\varepsilon+1-x^2).N_\varepsilon, \quad N_\varepsilon < \frac{N_{\varepsilon+1}}{2\varepsilon+1-x^2}.$$

Hierbei ist ferner vorausgesetzt, daß $2\varepsilon+1-x^2>0$ sei; was, da $x^2 < \frac{1}{4}\pi^2$ d. i. $x^2 < 2{,}4674\ldots$ ist, immer Statt hat, da $\varepsilon \geqq 1$, also $2\varepsilon+1 \geqq 3$ ist.

Daher

$$N_{\varepsilon+2} = (2\varepsilon+3)N_{\varepsilon+1} - x^2 N_\varepsilon > \left(2\varepsilon+3-\frac{x^2}{2\varepsilon+1-x^2}\right)N_{\varepsilon+1}.$$

Es ist aber $\frac{x^2}{2\varepsilon+1-x^2} < 1$, wenn $\varepsilon > x^2 - \frac{1}{2}$, d. i. $\varepsilon > 1{,}9674$ ist. Sei daher $\varepsilon \geqq 2$, so folgt $N_{\varepsilon+2} > 2(\varepsilon+1)N_{\varepsilon+1}$. Ferner:

$$N_{\varepsilon+3} = (2\varepsilon+5)N_{\varepsilon+2} - x^2 N_{\varepsilon+1} > \left(2\varepsilon+5-\frac{x^2}{2(\varepsilon+1)}\right)N_{\varepsilon+2} > 2(\varepsilon+2)N_{\varepsilon+2},$$

$$N_{\varepsilon+4} = (2\varepsilon+7)N_{\varepsilon+3} - x^2 N_{\varepsilon+2} > \left(2\varepsilon+7-\frac{x^2}{2(\varepsilon+2)}\right)N_{\varepsilon+3} > 2(\varepsilon+3)N_{\varepsilon+3},$$

u. s. w., so daß unter den gemachten Voraussetzungen allgemein

$$N_{\varepsilon+n+1} > 2(\varepsilon+n)N_{\varepsilon+n}$$

ist.

Setzen wir jetzt $F_{\varepsilon+1} - F_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon$, so ist nach der Theorie der Kettenbrüche

$$\vartheta_\varepsilon = \frac{x^{2\varepsilon+1}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}};$$

und offenbar

$$\operatorname{tng} x = F_\varepsilon + \vartheta_\varepsilon + \vartheta_{\varepsilon+1} + \vartheta_{\varepsilon+2} + \ldots.$$

Durch Multiplication der Ungleichungen

Digitized by Google

$$N_{\varepsilon+1}N_{\varepsilon+2} > 4.(\varepsilon+\tfrac{1}{2}(1-x^2))(\varepsilon+1)N_\varepsilon N_{\varepsilon+1},$$

$$N_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+3} > 4.(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)N_{\varepsilon+1}N_{\varepsilon+2},$$

$$N_{\varepsilon+3}N_{\varepsilon+4} > 4.(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)N_{\varepsilon+2}N_{\varepsilon+3},$$

u. ſ. w.

$$N_{\varepsilon+n}.N_{\varepsilon+n+1} > 4.(\varepsilon+n-1)(\varepsilon+n)N_{\varepsilon+n-1}N_{\varepsilon+n}$$

ergiebt ſich aber

$$N_{\varepsilon+n}N_{\varepsilon+n+1} > 4^n(\varepsilon+\tfrac{1}{2}(1-u^2))$$
$$\times|(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)\ldots.(\varepsilon+n+1)|^2(\varepsilon+n)N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}.$$

Daher

$$\vartheta_{\varepsilon+n} < \vartheta_\varepsilon.\frac{(\frac{1}{2}x)^{2n}}{(\varepsilon+\frac{1}{2}(1-u^2)).|(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)\ldots.(\varepsilon+n-1)|^2(\varepsilon+n)};$$

folglich um ſo mehr

$$\vartheta_{\varepsilon+n} < \vartheta_\varepsilon.\left\{\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)}\right\}^n.$$

Deßhalb iſt

$$\vartheta_\varepsilon+\vartheta_{\varepsilon+1}+\vartheta_{\varepsilon+2}+\vartheta_{\varepsilon+3}+\ldots.$$
$$< \vartheta_\varepsilon.\left|1+\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)}+\left(\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)}\right)^2+\left(\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)}\right)^3+\ldots.\right|$$

oder, weil $\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)} < 1$ iſt, wenn wir $\varphi_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon+\vartheta_{\varepsilon+1}+\vartheta_{\varepsilon+2}+\ldots.$ ſetzen:

$$\varphi_\varepsilon < \vartheta_\varepsilon.\left|1-\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)}\right|^{-1}, \quad \varphi_\varepsilon < \frac{4\varepsilon(\varepsilon+1)}{4\varepsilon(\varepsilon+1)-x^2}\vartheta_\varepsilon,$$

$$\varphi_\varepsilon < \vartheta_\varepsilon+\frac{x^2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)-x^2}\vartheta_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon-\vartheta_\varepsilon=\varphi_{\varepsilon+1} < \frac{x^{2\varepsilon+3}}{|4\varepsilon(\varepsilon+1)-x^2|N_\varepsilon N_{\varepsilon+1}};$$

wo $\varphi_{\varepsilon+1}$ der Gleichung $\operatorname{tng} x = F_{\varepsilon+1}+\varphi_{\varepsilon+1}$ angehört.

Das Reſultat unſerer Betrachtung iſt daher folgendes:

Wenn $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ iſt, ſo iſt, nachdem mindſtens $N_{\varepsilon-1} > N_{\varepsilon-2}$ geweſen, jederzeit

$$\varphi_\varepsilon < \frac{x^{2\varepsilon-1}}{|4\varepsilon(\varepsilon-1)-x^2|N_\varepsilon N_{\varepsilon-1}},$$

indem φ_ε den Fehler des εten Näherungsbruchs F_ε in der Formel 102) bezeichnet, und die Relation $\operatorname{tng} x = F_\varepsilon+\varphi_\varepsilon$ Statt findet.

Digitized by Google

§. 39.

Um dies auf einen speciellen Fall anzuwenden, wollen wir

$$x = 1 = 57^{\circ}17'44'',80625$$

setzen; und erhalten:

$$\operatorname{tng} 1 = 1:|1 - 1:|3 - 1:|5 - 1:|7 - 1:|9 - 1:|11 - \ldots$$

Daher

$$F_1 = \frac{1}{1},\quad F_2 = \frac{3}{2},\quad F_3 = \frac{14}{9},\quad F_4 = \frac{95}{61},\quad F_5 = \frac{841}{540},\quad F_6 = \frac{9156}{5879},$$

$$F_7 = \frac{118187}{75887},$$

indem

$$\varphi_5 < \frac{1}{79.61.540} \quad \text{oder} \quad \varphi_5 < \frac{1}{2602260};$$

$$\varphi_6 < \frac{1}{119.540.5879} \quad " \quad \varphi_6 < \frac{1}{377784540};$$

$$\varphi_7 < \frac{1}{167.5879.75887} \quad " \quad \varphi_7 < \frac{1}{74505325391}$$

sind.

Es ist daher der Werth $\operatorname{tng} 1 = \frac{841}{540}$ noch in der 6ten, $\operatorname{tng} 1 = \frac{9156}{5879}$ noch in der 8ten, $\operatorname{tng} 1 = \frac{118187}{75887}$ noch in der 10ten Decimalstelle richtig.

Dies sind aber auch die Werthe von

$$\cot(\tfrac{1}{2}\pi - 1) \quad \text{oder} \quad \cot(32^{\circ}42'19375)$$

beziehungsweise mit denselben Fehlern.

Will man ferner hieraus den Werth von

$$\sin 2 = \sin(\pi - 2) = \sin'65^{\circ}24'30'',3875) = \cos(24^{\circ}35'29''6125)$$

ableiten, so ist nach dem Obigen z. B.

$$\sin 2 = \frac{2.F_6}{1 + F_6{}^2} = \frac{2.5879.9156}{(5879)^2 + (9156)^2} = \frac{107656248}{118394977}$$

mit einem kleineren Fehler ψ als $\frac{1}{188892270}$, weil $\psi = 2\cos 1^2 \cos 2.\varphi_6$. Und zwar ist $\sin 2$ um ψ zu groß, weil $\cos 2$ negativ ist.

Digitized by Google

Es läßt sich übrigens nachweisen, daß allgemein der Fehler φ_ε und x zugleich wachsen und abnehmen; was uns hier jedoch zu weit führen würde.

Wenn es daher bei der Berechnung der Werthe von tng x nur auf Genauigkeit der ersten acht Decimalstellen ankäme, so würde der 6te Näherungsbruch, oder die Formel

$$\text{tng}\,x = 21x \cdot \frac{495 - 60x^2 + x^4}{10395 - 4725x^2 + 210x^4 - x^6},$$

diese für jedes $x < 1$ erfüllen.

Für $x \leqq \frac{1}{2}$ leistet aber schon der 5te Näherungsbruch, also die Formel

$$\text{tng}\,x = \frac{1}{15}x \cdot \frac{945 - 105x^2 + x^4}{63 - 28x^2 + x^4}$$

dasselbe; u. s. w.

§. 40.

Schließlich wollen wir uns noch ein Urtheil über die Genauigkeit verschaffen, welcher man sich bei der Berechnung von sin x und cos x nach den Formeln 104) zu versehen hat. Zu dem Zwecke setzen wir

$$S_\varepsilon = \frac{Z_\varepsilon}{1.3.5....(2\varepsilon-1)}, \quad C_\varepsilon = \frac{N_\varepsilon}{1.3.5....(2\varepsilon-1)}$$

und erhalten

$$S_{\varepsilon+1} - S_\varepsilon = \frac{Z_{\varepsilon+1} - (2\varepsilon+1)Z_\varepsilon}{1.3.5...(2\varepsilon+1)} = \frac{-x^2 Z_{\varepsilon-1}}{1.3.5....(2\varepsilon+1)} = -\frac{x^2}{(2\varepsilon-1)(2\varepsilon+1)} \cdot S_{\varepsilon-1},$$

$$C_{\varepsilon+1} - C_\varepsilon = \frac{N_{\varepsilon+1} - (2\varepsilon+1)N_\varepsilon}{1.3.5....(2\varepsilon+1)} = \frac{-x^2 N_{\varepsilon-1}}{1.3.5....(2\varepsilon+1)} = -\frac{x^2}{(2\varepsilon-1)(2\varepsilon+1)} \cdot C_{\varepsilon-1}.$$

Da sin x und cos x für $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ positiv sind, und $S_{\varepsilon-1}$ und $C_{\varepsilon-1}$ sich diesen Größern bis zu jedem beliebigen Grade nähern, so folgt, daß $S_{\varepsilon-1}$ und $C_{\varepsilon-1}$ von einem bestimmten Werthe des ε an positiv sind.

Indem wir daher voraussetzen, daß ε diesen Werth überschritten, ist es aus den obigen Gleichungen ersichtlich, daß stets $S_\varepsilon > S_{\varepsilon+1} > \sin x$, $C_\varepsilon > C_{\varepsilon+1} > \cos x$ sein wird.

Ferner erhellt die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

Digitized by Google

$$S_\varepsilon - \sin x = x^2 . \left\{ \frac{S_{\varepsilon-1}}{(2\varepsilon-1)(2\varepsilon+1)} + \frac{S_\varepsilon}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)} + \frac{S_{\varepsilon+1}}{(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+5)} + \ldots \right\},$$

$$C_\varepsilon - \cos x = x^2 . \left\{ \frac{C_{\varepsilon-1}}{(2\varepsilon-1)(2\varepsilon+1)} + \frac{C_\varepsilon}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)} + \frac{C_{\varepsilon+1}}{(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+5)} + \ldots \right\}.$$

Aber, wie wir gesehen haben

$$S_{\varepsilon-1} > S_\varepsilon > S_{\varepsilon+1} > \ldots > \sin x, \quad C_{\varepsilon-1} > C_\varepsilon > C_{\varepsilon+1} > \ldots > \cos x.$$

Daher folgt aus diesen Gleichungen, weil

$$\frac{1}{2(2\varepsilon-1)} = \frac{1}{(2\varepsilon-1)(2\varepsilon+1)} + \frac{1}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)} + \frac{1}{(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+5)} + \ldots$$

ist, daß

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . \sin x < S_\varepsilon - \sin x < \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . S_{\varepsilon-1},$$

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . \cos x < C_\varepsilon - \cos x < \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . C_{\varepsilon-1}$$

ist. Setzen wir jetzt $S_\varepsilon - \sin x = \psi'_\varepsilon$, $C_\varepsilon - \cos x = \chi'_\varepsilon$, so sind die Fehler ψ'_ε und χ'_ε von S_ε und C_ε offenbar positive Größen, welche von S_ε und C_ε subtrahirt werden müßten, um $\sin x$ und $\cos x$ richtig zu erhalten.

Weil also $\sin x = S_\varepsilon - \psi'_\varepsilon$, $\cos x = C_\varepsilon - \chi'_\varepsilon$ ist, so giebt der erste Theil der obigen Ungleichungen:

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . (S_\varepsilon - \psi'_\varepsilon) < \psi'_\varepsilon, \quad \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . (C_\varepsilon - \chi'_\varepsilon) < \chi'_\varepsilon;$$

woraus

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} . S_\varepsilon < \psi'_\varepsilon, \quad \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} . C_\varepsilon < \chi'_\varepsilon$$

folgt.

Wir haben also gefunden:

Wenn $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ und erst alle Z_ε und N_ε von einem gewissen Werthe des ε an positiv sind, so sind die Fehler ψ'_ε und χ'_ε in den Gleichungen $\sin x = S_\varepsilon - \psi'_\varepsilon$, $\cos x = C_\varepsilon - \chi'_\varepsilon$ von S_ε, C_ε nach den Ungleichungen

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} . S_\varepsilon < \psi'_\varepsilon < \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . S_{\varepsilon-1};$$

$$\frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} . C_\varepsilon < \chi'_\varepsilon < \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)} . C_{\varepsilon-1}$$

zu beurtheilen.

Digitized by Google

Die Annäherung in den Formeln 104) ist mithin sehr gering.

Es ist aber möglich, mit Berücksichtigung dieser Fehlergrenzen den Werth von sinx und cosx genauer zu erhalten, wenn man

$$\psi_\varepsilon = \psi'_\varepsilon - \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} S_\varepsilon, \quad \chi_\varepsilon = \chi'_\varepsilon - \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} \cdot \mathfrak{C}_\varepsilon$$

setzt, und sinx und cosx nach den Formeln

$$\sin x = S_\varepsilon - \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} S_\varepsilon = \frac{2(2\varepsilon-1)}{2(2\varepsilon-1)+x^2} \cdot S_\varepsilon,$$

$$\cos x = \mathfrak{C}_\varepsilon - \frac{x^2}{2(2\varepsilon-1)+x^2} \mathfrak{C}_\varepsilon = \frac{2(2\varepsilon-1)}{2(2\varepsilon-1)+x^2} \mathfrak{C}_\varepsilon$$

berechnet.

Die Fehler dieser Formeln lassen sich dann nach dem folgenden Satze beurtheilen.

Wenn $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ und ε so groß angenommen wird, daß Z_ε und N_ε positiv sind und bleiben, wenn ε wächst, so sind die Fehler, welche man begeht, indem man

$$\sin x = \frac{2Z_\varepsilon}{1.3.5.7....(2\varepsilon-3).[2(2\varepsilon-1)+x^2]},$$

$$\cos x = \frac{2N_\varepsilon}{1.3.5.7....(2\varepsilon-3).[2(2\varepsilon-1)+x^2]}$$

setzt, respective nach den Ungleichungen

$$\psi_\varepsilon < \frac{x^4}{2(2\varepsilon-1).[2(2\varepsilon-1)+x^2]} \cdot \frac{2Z_{\varepsilon-2}+Z_\varepsilon}{1.3.5....(2\varepsilon-3)},$$

$$\chi_\varepsilon < \frac{x^4}{2(2\varepsilon-1).[2(2\varepsilon-1)+x^2]} \cdot \frac{2N_{\varepsilon-2}+N_\varepsilon}{1.3.5....(2\varepsilon-3)}$$

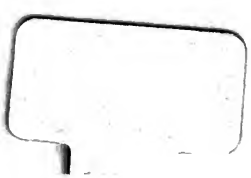
zu beurtheilen. Und zwar sind die durch obige Formeln erhaltenen Werthe von sinx und cosx um ψ_ε und χ_ε zu groß.

Druck der Königl. Universitäts-Druckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google